Monsieur,

En examinant de plus près les propositions que vous m'avez communiquées le mois dernier, j'ai reconnu que l'une d'elles n'est pas exacte.

Ainsi, contrairement à votre assertion,

« 17 n'est pas le seul nombre entier, dont le cube, diminué de 13, soit le quadruple d'un triangulaire. »

Le système d'équations, auquel conduit l'énoncé,

$$u^2+v^2=x^3, \quad u-v=5,$$

(équivalent à l'équation $x^3=(y+3)^2+(y-2)^2$)

n'admet bien qu'une seule solution, $x=17$, quand u et v sont premiers entre eux.

Mais, si u et v, et, par suite, x sont multiples de 5, c'est-à-dire si $u=5r$, $v=5s$, $x=5t$, le système d'équations

$$r^2+s^2=\rho t^3, \quad r-s=1,$$

admet la solution immédiate $r=2, s=1, t=1$, qui conduit à l'identité numérique

$$\rho^3-13=4\left[\frac{7.8}{2}\right],$$

et met, par conséquent, en défaut la proposition énoncée.

Cette remarque bien simple m'avait échappé, parceque je voulais passer tout de suite à la solution générale, c'est-à-dire à des équations telles que celle-ci :

$$p^3-9p^2q-3pq^2+3q^3=1.$$

Ces équations admettent-elles d'autres solutions que la solution immédiate $p=1, q=0$? Je ne puis prouver le contraire.

À propos de la question Liouvet, je ne sais si vous avez remarqué les différentes formes qu'on peut donner à l'équation

$$\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2=\frac{y(y+1)}{2}. \quad (A)$$

1° $$2\left[x(x+1)\right]^2+1=(y+1)^2, \quad (B)$$

Cette forme conduit immédiatement à la transformation que vous m'avez indiquée, à savoir : que les nombres triangulaires cherchés appartiennent nécessairement à la série

$$0, 1, 6, 35, 204, 1189, 6930, \ldots\ldots$$

$$u_n = 6u_{n-1} - u_{n-2}.$$

Il est bon de remarquer que les derniers chiffres 0, 1, 6, 5, 4, 9 se reproduisant périodiquement et qu'un nombre triangulaire n'étant jamais terminé par 4 ni par 9, il serait facile de cribler de la série précédente des nombres qui ne répondent sûrement pas à la question.

2° $$\left[(x+1)^2-1\right]^2 + \left[x^2-1\right]^2 = (2y+1)^2. \qquad (G)$$

On pourrait, peut-être, arriver à résoudre cette équation, en lui appliquant les formules connues pour les triangles rectangles en nombres, comme l'ont fait, d'une manière si heureuse, M.M. Genocchi et Réalis, pour l'équation

$$\left[x^2\right]^2 + \left[x^2-1\right]^2 = z^2,$$

concernant un théorème de Fermat, le premier dans l'Année 1883 des Nelles Annales et l'autre dans le Bullettino di Bibliografia (1883).

Dans l'équation (G) les deux premiers termes $(x+1)^2-1$ ou $x(x+2)$ et x^2-1 ou $(x-1)(x+1)$ sont premiers entre eux ou ont pour diviseur commun 3, puisque les quatre facteurs $x-1, x, x+1, x+2$ sont des nombres consécutifs.

Dans le 1er cas, y ne peut être impair, car $2y+1$ serait de la forme $4n+3$, incompatible avec celle de la somme de deux carrés. Dans le 2e cas, y ne peut être pair, car $2y+1$ serait de la forme $4a^2+1$, non divisible par 3.

3° $$(x^2+x+1)^2 = (x+y+1)^2 + (x-y)^2 \quad (D)$$

4° $$(x+1)^4 + x^4 + 1^4 = (2x+1)^2 + (y+1)^2 \quad (E)$$

5° Enfin j'ai essayé de résoudre le système d'éq:

$$\begin{cases} 8x+1 = y^2 \\ 8x^2+1 = z^2 \end{cases}$$

qu'on peut écrire immédiatement, en observant, après Diophante, que « la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit triangulaire, est que l'octuple de ce nombre, augmenté de l'unité, soit un carré. »

En les ajoutant membre à membre, on obtient la suivante $$2(2x+1)^2 = y^2+z^2,$$ à laquelle on peut appliquer les formules des triangles rectangles.

Ou bien, en éliminant x, on a l'éq:

$$y^4 - 2y^2 + 9 = 8z^2$$

qui admet une infinité de solutions en nombres rationnels, mais qu'il me paraît bien difficile de résoudre en nombres entiers.

Malgré ces nombreuses transformations, je n'ai encore pu arriver à un résultat concluant. — Peut-être Lionnet lui-même ne possédait-il pas la solution de la question par lui posée, de même qu'il n'avait assurément pas la réponse aux quatre questions, bien autrement importantes, par lesquelles il termine son excellente Algèbre élémentaire (1868, p. 333).

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de mon entier dévouement. E. Fauquembergue,

professeur au lycée du Mans.

(Sarthe)