R. UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

IL RETTORE

Roma, 29 giugno, 1891

Caro professore,

La sua lettera mi giunge, mentre sto mettendo in ordine tutte le mie carte ed aspettando tutti i miei affari per partire ad una inchiesta nelle Università di Bologna, di Torino ed di Napoli. Quindi mi manca il tempo di rifare tutti i calcoli, onde risolvere il dubbio che Ella mi propone nella sua lettera. Però, così a occhio e croce, credo che si debba procedere come appresso.

Lo spazio S sia limitato da due porzioni s_1, s_2 di superficie: X, Y, Z siano le forze applicate a' singoli elementi di volume; L_1, M_1, N_1; L_2, M_2, N_2 le forze applicate a' singoli elementi di superficie delle s_1, s_2 rispettivamente. In tal caso

$$\int_S \Theta\, dS = \frac{1}{3A-4B}\left\{\int_S (Xx+Yy+Zz)\,dS + \int_{s_1}(L_1x+M_1y+N_1z)\,ds_1 + \int_{s_2}(L_2x+M_2y+N_2z)\,ds_2\right\}$$

Venendo al caso suo, assumiamo per lo spazio S la porzione compresa tra il piano indefinito ed una mezza sfera di raggio arbitrario α descritta col centro nell'origine delle coordinate: per la superficie s_1 la porzione del piano indefinito contenuta entro la sfera, per superficie S_1 la mezza sfera. Per X, Y, Z bisognerà mettere $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ risp.; per L_1, M_1, N_1 invece $0, 0, \varphi$; per L_2, M_2, N_2 forze che rappresentino le azioni esercitate dalla parte del corpo esterna alla sfera sulle parti interne attraverso i singoli elementi della S_1, forze che è facile calcolare avendo le espressioni degli spostamenti u, v, w. Allora, posto

$$r^2 = x^2+y^2+z^2,$$

si avrà

$$(3A-4B)\int_S \Theta\, dS = \int_S r\frac{d\varphi}{dr}\,dS + \int_{S_1}(L_2x+M_2y+N_2z)\,ds_1$$

(ben inteso, il piano indefinito limite del corpo è assunto per piano $z=0$), ossia

$$(3A-4B)\int_S \Theta\, dS = \int_S \frac{d.r^3\varphi}{dr}\cdot\frac{dS}{r^2} - 3\int_S \varphi\, dS + \int_{S_1}(L_2x+M_2y+N_2z)\,ds_1$$

Per giungere al risultato che Ella vuole stabilire bisogna prendere i limiti per $\alpha=\infty$ dei due membri. Il primo membro diventerebbe allora la dilatazione totale del corpo moltiplicata per $3A-4B$. Nel secondo membro (con una semplice trasformazione ~~bennota~~ d'integrali) si vede che

$$\lim_{\alpha=\infty}\int_S \frac{d.r^3\varphi}{dr}\,\frac{dS}{r^2}=0$$

quante volte per valori grandissimi di r la φ sia della forma $\frac{\Omega}{r^{3+\sigma}}$, dove σ è un numero positivo e Ω non diventi infinitamente grande per $r=\infty$. Il secondo termine collima con quello che Lei ha trascritto nella sua lettera: resterebbe finalmente a calcolarsi

$$\lim_{\alpha=\infty}\int_{S_1}(L_2x+M_2y+N_2z)\,ds_1,$$

ed è precisamente questo calcolo, che ora mi manca il tempo di eseguire.

Del resto che questo sia il procedimento legittimo da tenere, Ella lo vedrà anche considerando il caso, in cui i punti all'infinito restando fissi, quelli dell'interno della massa non siano sollecitati da forze ($X=0, Y=0, Z=0$) e quelli della superficie $z=0$ invece da forze normali dirette sempre verso l'interno dello spazio occupato dal corpo ($L=0, M=0$, N positivo ovunque). Ebbene in tal caso la dilatazione totale non è certamente uguale a zero. Eppure applicando materialmente la nota formola che dà questa dilatazione totale, si troverebbe per valore di detta dilatazione lo zero.

Ma di quanto ho detto, si potrebbero addurre anche altre ragioni, che a Lei, messo sull'avviso, certo non sfuggiranno.

Una stretta di mano

Dal suo aff.mo

V. Cerruti

Lo scritto sembra currenti calamo: perciò chiedo venia delle imprecisioni di linguaggio.