Torino 20 Novembre 1896

Ill.mo Professore

Era mio dovere, appena ricevute le sue splendide "Lezioni di Geometria Intrinseca" di scriverle subito per ringraziarla del suo prezioso dono; ma non ho potuto resistere alla tentazione di leggere subito attentamente tutto il suo libro, per poterle trasmettere insieme coi sensi della mia riconoscenza, anche le mie impressioni sul medesimo. Dalla lettura delle sue svariate ed importanti pubblicazioni, e specialmente dalla sua "Introduzione alla teoria Matematica della Elasticità" che Ella ebbe altra volta la squisita gentilezza di mandarmi, si era in me generata per Lei, che meritamente tiene uno dei primi posti tra i Matematici viventi, la più alta stima ed ammirazione, ed il godimento intellettuale provato percorrendo questo suo ultimo lavoro, non fece che aumentare, se era possibile, questi miei sentimenti: Cultori delle discipline Matematiche, e tra questi io sono uno dei più umili e modesti, le debbono molto riconoscente per aver Ella occupato il suo forte e fertile ingegno alla produzione di così interessanti lavori che si leggono con tanto interesse.

Il Prof.re Peano, al quale sono legato da una antica, affettuosa, e quasi fraterna amicizia, ed anche il Prof. Gerbaldi mi hanno spesso parlato oltre che della sua scienza, anche della sua speciale bontà e cortesia, ed è approfittando di queste sue qualità, che mi faccio lecito di sottoporle alcune osservazioni sulle sue «Lezioni».

Premetto che da qualche tempo, senza però pubblicare nulla, mi son occupato di Geometria differenziale, applicando a questa dottrina il calcolo Geometrico (secondo Grassmann e Peano) e questa applicazione mi pare e mi par feconda di buoni risultati analoghi a quelli che Ella ricava dalla analisi intrinseca degli enti geometrici. Ora alcuni miei risultati non concordano coi suoi, e si presentano cambiati di segno. Ecco le questioni:

1°) Nel piano — Sia M un punto mobile funzione arc. di s (arco); il punto M descrive una linea; $\frac{dM}{ds} = T$ è un vettore unità di retta secondo la tangente in M alla traiettoria di M, $\frac{d^2M}{ds^2} = \frac{1}{\rho}N$ essendo N un vettore unità diretto secondo la normale. Sia P un punto di coordinate $(x\,y)$ rispetto al sistema MTN (che è il sistema (Mxy)) e sia P immobile rispetto ad MTN, ossia a Mxy.

Sarà: $P = M + xT + yN$; $\frac{dP}{ds} = T + x\frac{dT}{ds} + y\frac{dN}{ds}$

Ma: $\frac{dT}{ds} = \frac{1}{\rho}N$, $N = iT$, $\frac{dN}{ds} = \frac{1}{\rho}iN = -\frac{1}{\rho}T$:

$$\frac{dP}{ds} = \left(1-\frac{y}{\rho}\right)T + \frac{x}{\rho}N$$

e le coordinate di $\frac{dP}{ds}$ rispetto ad MTN saranno:

$$\frac{dx}{ds} = 1 - \frac{y}{\rho} \quad ; \quad \frac{dy}{ds} = \frac{x}{\rho}$$

Ella invece trova a Pag. 20 le formule (2)

$$\frac{dx}{ds} = \frac{y}{\rho} - 1 \quad ; \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{x}{\rho}$$

cioè trova gli stessi valori cambiati di segno.

A mio avviso le formule (1) stanno, quantunque non corrispondano alle precedenti ($x + dx = u + x + \delta x - y\,\delta\varphi$) dove mi pare si sia scambiato d con δ; ma in seguito Ella pone $\delta x = \delta y = 0$ per l'immobilità del punto xy. Mi pare che essendo $x+dx$, $y+dy$ le coordinate di P rispetto ad $M'x'y'$, per l'immobilità di P rispetto ad $(M'x'y')$ si debba porre $dx = dy = 0$ e quindi si trova

$$\frac{\delta x}{ds} = 1 - \frac{y}{\rho}, \quad \frac{\delta y}{ds} = \frac{x}{\rho}$$

come ho trovato io. (Queste formule si trovano nelle mie Lezioni di Meccanica R.; pag. 158 esercizi XVI nella espressione di M' che si deve leggere: $M' = v\left[\left(1-\frac{y}{\rho}\right)T + \frac{x}{\rho}N\right]$)

~~2° Nello spazio~~ In conseguenza sarebbero errate le (3) che si dovrebbero leggere: $\frac{dz}{ds} = +\cos\theta$; $\frac{d\theta}{ds} = +\frac{1}{\rho} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{z}$

e le (4) che si debbono leggere: $\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{\rho}$; $\frac{dq}{ds} = -\operatorname{sen}\varphi$

2°) Nello spazio — A pagina 124 e seguenti, per l'immobilità del punto $P(x\,y\,z)$ rispetto ad M, trova le formule (8)

$$\frac{dx}{ds} = \frac{z}{\rho} - 1; \quad \frac{dy}{ds} = \frac{z}{\tau}, \quad \frac{dz}{ds} = -\frac{x}{\rho} - \frac{y}{\tau}$$

Secondo me, anche qui si dovrebbe porre nelle (3) $dx = dy = dz = 0$ per esprimere l'immobilità del punto M, e quindi se ne dedurrebbe: $\frac{\delta x}{ds} = 1 - \frac{z}{\rho}$, $\frac{\delta y}{ds} = -\frac{z}{\tau}$, $\frac{\delta z}{ds} = +\frac{x}{\rho} + \frac{y}{\tau}$

Col metodo dei vettori, detto B un vettore unità diretto secondo la binormale, si ha: $P = M + xT + zN + yB$

$$\frac{dP}{ds} = \frac{dM}{ds} + x\frac{dT}{ds} + y\frac{dB}{ds} + z\frac{dN}{ds}.$$ ~~Ma~~

Ma (Peano, Analisi Infinitesimale, 1893. Vol 2: Pag. 102, 103)

$$\frac{dM}{ds}=T,\quad \frac{dT}{ds}=\frac{1}{\rho}N,\quad \frac{dB}{ds}=\frac{1}{\tau}N,\quad \frac{dN}{ds}=-\frac{1}{\rho}T-\frac{1}{\tau}B$$

quindi:

$$\frac{dP}{ds}=\left(1-\frac{z}{\rho}\right)T+\left(\frac{y}{\tau}+\frac{x}{\rho}\right)N-\frac{z}{\tau}B$$

e le coordinate di $\frac{dP}{ds}$ rispetto al triedro $MTBN$ saranno appunto $\left(1-\frac{z}{\rho},\ \frac{x}{\rho}+\frac{y}{\tau},\ -\frac{z}{\tau}\right)$

Le (9) si possono dedurre dalla formola di Taylor applicata al vettore $M'-M$. Si ha:

$$M'-M=M(s+ds)-M(s)=\frac{dM}{ds}ds+\frac{d^2M}{ds^2}\frac{ds^2}{2}+\frac{d^3M}{ds^3}\frac{ds^3}{6}+\ldots$$

$$=T\,ds+\frac{1}{2\rho}N\,ds^2+\left(-\frac{\rho'}{\rho^2}N-\frac{1}{\rho^2}T-\frac{1}{\rho\tau}B\right)\frac{ds^3}{6}+\ldots$$

$$=\left(ds-\frac{ds^3}{6\rho^2}\ldots\right)T-\frac{ds^3}{6\rho\tau}B+\left(\frac{ds^2}{2\rho}-\frac{\rho'}{6\rho^2}ds^3\right)B+\ldots$$

e le coordinate di M' rispetto al triedro $MTBN$ saranno:

$$u=ds-\frac{ds^3}{6\rho^2}\ldots;\quad v=-\frac{ds^3}{6\rho\tau}+\ldots;\quad w=\frac{ds^2}{2\rho}-\frac{\rho'}{6\rho^2}ds^3\ldots$$

e non c'è discordanza coi segni tra queste e le sue (9).

A questo punto mi assale fortemente il dubbio che le sue $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ abbiano un significato diverso da quello che io loro attribuisco, o che la sua terna di riferimento sia opposta al vertice a quella che io considero ed in questo caso le mie osservazioni sarebbero prive di fondamento. Se così è, non mi resta che a domandarle scusa di averle fatto perdere un po' di tempo nel leggere questa mia.

Accolga, illustre professore, i sensi della mia più alta stima e considerazione, insieme con quelli della mia riconoscenza, e mi creda

Suo Devotissimo

Prof. F. Castellano

(Accademia Militare)