Carissimo Sig. Professore!

Eccole il calcolo particolareggiato.

Sia η una radice 7^a complessa dell'unità, e si ponga

$$k_1 = 1 + \eta + \eta^2 + \eta^4,$$
$$k_2 = 1 + \eta^3 + \eta^5 + \eta^6,$$

onde

$$k_1 + k_2 = 1$$

{nelle indicazioni di Stammone sono $\rho_1 = k_2$, $\rho_2 = -k_1$}. Si avrà

$$k_1 k_2 = 1 + 1 + 2(1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \eta^4 + \eta^5 + \eta^6) = 2,$$

cosicchè sarà

$$k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 = 1 - 8,$$

cioè

$$k_1 - k_2 = \pm i\sqrt{7}.$$

D'altronde, si ~~ponga~~ prenda la rappresentazione trigonometrica. Saranno:

$$\eta = \cos\frac{2\pi}{7} + i \,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{7} \qquad \eta^3 = \cos\frac{6\pi}{7} + i\,\mathrm{sen}\frac{6\pi}{7}$$
$$\eta^2 = \cos\frac{4\pi}{7} + i\,\mathrm{sen}\frac{4\pi}{7} \qquad \eta^5 = \cos\frac{10\pi}{7} + i\,\mathrm{sen}\frac{10\pi}{7}$$
$$\eta^4 = \cos\frac{8\pi}{7} + i\,\mathrm{sen}\frac{8\pi}{7} \qquad \eta^6 = \cos\frac{12\pi}{7} + i\,\mathrm{sen}\frac{12\pi}{7}.$$

Ma

$$\cos\frac{2\pi}{7} = \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{7}\right) = -\cos\frac{5\pi}{7} \qquad \mathrm{sen}\frac{2\pi}{7} = \mathrm{sen}\left(\pi - \frac{5\pi}{7}\right) = \mathrm{sen}\frac{5\pi}{7}$$
$$\cos\frac{4\pi}{7} = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) = -\cos\frac{3\pi}{7} \qquad \mathrm{sen}\frac{4\pi}{7} = \mathrm{sen}\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) = \mathrm{sen}\frac{3\pi}{7}$$
$$\cos\frac{8\pi}{7} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\cos\frac{\pi}{7} \qquad \mathrm{sen}\frac{8\pi}{7} = \mathrm{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\mathrm{sen}\frac{\pi}{7}$$
$$\cos\frac{6\pi}{7} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = -\cos\frac{\pi}{7} \qquad \mathrm{sen}\frac{6\pi}{7} = \mathrm{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = \mathrm{sen}\frac{\pi}{7}$$
$$\cos\frac{10\pi}{7} = \cos\left(\pi + \frac{3\pi}{7}\right) = -\cos\frac{3\pi}{7} \qquad \mathrm{sen}\frac{10\pi}{7} = \mathrm{sen}\left(\pi + \frac{3\pi}{7}\right) = -\mathrm{sen}\frac{3\pi}{7}$$
$$\cos\frac{12\pi}{7} = \cos\left(\pi + \frac{5\pi}{7}\right) = -\cos\frac{5\pi}{7} \qquad \mathrm{sen}\frac{12\pi}{7} = \mathrm{sen}\left(\pi + \frac{5\pi}{7}\right) = -\mathrm{sen}\frac{5\pi}{7}$$

Dunque:

$$k_1 - k_2 = 2i\left(\mathrm{sen}\frac{5\pi}{7} + \mathrm{sen}\frac{3\pi}{7} - \mathrm{sen}\frac{\pi}{7}\right),$$

e quindi

$$2\left(\operatorname{sen}\frac{5\pi}{7}+\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)=+\sqrt{7},$$

scomparendo l'ambiguità di segno, per essere il primo membro certamente positivo.

Resta dunque stabilito che

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{7}+\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}=\frac{1}{2}\sqrt{7}.$$

Sarei lieto di vedere in qual modo Ella ne ricavò la conseguenza che allora anche

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{14}-2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}=\frac{1}{2}\sqrt{7}$$

e come allora ne risulti che la radice positiva di

$$x^3+x^2\sqrt{7}+x-\frac{1}{\sqrt{7}}=0$$

sia

$$x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{14}.$$

A me manca il tempo assolutamente per cercare questi risultati.

Mi creda ora e sempre

suo aff.mo

A. Brambilla

$\alpha^5=1$	$\alpha^7=1$	$\alpha^9=1$
$1+\alpha+\alpha^4$ $1+\alpha^2+\alpha^3$	$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^4$ $1+\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6$.	
$\alpha^3=1$ $1+\alpha$ $1+\alpha^2$		

$k_1 =$

P.S. Ho chiesto informazioni circa il Convitto Nazionale. Si pagano 1000 lire annue di retta e poi occorrono sempre altre 500 lire. Come vede si tratta di una bagatella! Non c'è poi riduzione nel caso di due fratelli.

A Maddaloni sono circa 600 lire annue e le spese non ordinarie, sommano a circa 200 lire all'anno.

A.B.