Gentilissimo Signor Professore,

La sua cartolina mi è graditissima come quella che mi porge il destro di entrare in corrispondenza con Lei che da tanto tempo ammiro nelle opere matematiche.

Ella enuncia una proposizione che è certo notevole ed importante e che non era stata prima d'ora enunciata da alcuno.

La dimostrazione diretta mi è facile; ma, come Ella mi suggerisce, si può dedurre anche da alcuni risultamenti che sono esposti nel mio contributo con ragionamento simile a quello di cui io mi servo per stabilire proposizioni che, in qualche modo, contengono le reciproca della sua.

Alla pg. 40 del mio Contributo ho dimostrato che, posto

$$\psi(x_n) = \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}, \quad \rho_n = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)},$$

si ha (formula 14)

$$\psi(x_{n+1}) - \psi(x_n) = \frac{\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)}{\varphi(x_{n+1})}\{\rho(x_n) - \psi(x_n)\}.$$

Fatto $\varphi(x) = x$, deduco da questa formula che: se per una determinata successione x_n, si ha costantemente

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} > \frac{f(x_n)}{x_n},$$

ne viene poi anche

$$\frac{f(x_{n+1})}{x_{n+1}} > \frac{f(x_n)}{x_n}.$$

Ora, fatto $x_n = nh$, la ipotesi del suo teorema:

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) > f(x_n) - f(x_{n-1})$$
$$> f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})$$
$$> f(x_1) - f(x_0);$$

porta alle conseguenze:

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) > \frac{f(x_n)}{n},$$

cioè a

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{h} > \frac{f(x_n)}{hn},$$

ed anche

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} > \frac{f(x_n)}{x_n}.$$

È ovvio ora completare la dimostrazione.

A questo proposito Ella avrà anche veduto certamente che se $\varphi(x)$ è ~~una~~ funzione positiva sempre crescente, e se per ogni coppia di numeri positivi x, h, si ha

$$\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{\varphi(x+2h)-\varphi(x+h)} > \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)},$$

la funzione $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, è sempre crescente —

E cioè: Se le funzioni f, φ, sono derivabili, e se il quoziente delle derivate è crescente, lo è anche quello delle funzioni.

Teoremi questi che si riducono facilmente a quello che Ella ha enunciato.

Mi permetta di esprimerle il desiderio vivissimo di fare la sua personale conoscenza; e gradisca i sensi della più perfetta stima

del Suo

Dev.mo suo

Ettore Bortolotti

Modena 27 Dic. 19[illegible]