Sassari, 5 Agosto 1901.

Illustre professore.

È certamente ardire il rivolgermi a Lei, io non conosciuto, e perciò La prego a volerne attribuire la colpa a sincera stima del Suo ingegno e a fiducia nella Sua cortesia. D'altronde a chi dobbiamo rivolgerci noi chierici della matematica se non ai Sacerdoti di questa dea? Scusi la metafora e noti che prima di chiedere consiglio a Lei, non ho mancato di rivolgermi a quello di coloro che altre volte mi mostrarono benevolenza, senza ottenere una risposta esauriente per la ragione che la materia è poco nota anche a qualcuno che è maestro in altre parti della geometria. Per non annoiarla troppo entro subito in argomento.

Un po' perchè mi trovo fuori del mondo scientifico e non ho libri, un po' per mia indole naturale, impresi da poco tempo a studiare la recente geometria del triangolo secondo un punto di vista che la mia ignoranza mi lascia credere mio, ma che forse è stato seguito da altri; e siccome mi pare che la via da me battuta non sia infeconda, vorrei continuare gli studi iniziati, se non che, quantunque abituato ai disinganni, mi riuscirebbe spiacevole rifare cose già fatte altre volte.

La mia idea fondamentale è lo studio generale dei sistemi di coordinate in corrispondenza coi punti per i quali ciascun sistema si trova adatto a metterne in evidenza le proprietà principali.

Io considero dunque tutte le corrispondenze involutorie simili a quelle dei punti coniugati isogonali e dei punti reciproci nel modo seguente. Per un dato sistema di coordinate considero come coniugati due punti se i valori delle coordinate di uno di essi si possono dedurre da quelli delle coordinate dell'altro colle stesse operazioni mediante le quali i valori delle coordinate del secondo si ottengono da quelli delle coordinate del primo. Chiamo *viceversici* tali valori e *viceversione* il complesso delle operazioni colle quali gli accennati valori si ottengono l'uno dall'altro.

Ora può avvenire che, per un dato sistema di coordinate esista un punto le cui coordinate abbiano valori viceversici di sè stessi; in tal caso chiamo quel punto *centro* della involuzione. P. es. il baricentro e l'incentro sono i centri delle involuzioni costituite dai punti reciproci e dai coniugati isogonali, per i quali la viceversione è l'ordinaria inversione aritmetica. Può invece avvenire che non esista il centro della involuzione, ma che esistono due punti limiti che chiamo *poli* per i quali i valori delle coordinate, rimanendo pur viceversici gli uni agli altri, siano eguali fra loro. Ciò avviene p. es. per l'involuzione dei punti gemelli, qualora si assumano per coordinate di un punto M le tangenti degli angoli BMC, CMA, AMB; la viceversione in questo caso è il cambiamento di segno, perchè gli angoli accennati, per i punti gemelli, sono o eguali di senso contrario o supplementari dello stesso senso, e perciò le loro tangenti sono in un caso e nell'altro eguali di segno contrario. Il centro della involuzione, che dovrebbe avere le coordinate nulle, non esiste, ma esistono i centri isogonici, le cui coordinate sono eguali a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ per l'uno e a $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ per l'altro; questi punti sono dunque i poli della involuzione.

Risultati generali finora ne ho ottenuti pochi; la qual cosa si può spiegare colla mia scarsa coltura e colla brevità del tempo dedicato al mio studio; tuttavia qualche cosa ho trovato. Mi sembrano p. es. degne di nota due classi doppiamente infinite di curve (cubiche nei casi ordinarii) che hanno per equazioni

$$\Sigma\, l(y-z)(z+x)(x+y)=0\,, \quad \Sigma\, lx(y^2-z^2)=0\,, \quad (\text{permut. } xyz,\ lmn)$$

dove i coefficienti rimangono indeterminati.

Le curve rappresentate da queste equazioni, qualunque sia il sistema di coordinate, passano sempre per il centro o per i poli e per i punti che anche non essendo poli hanno coordinate eguali fra loro; passano anche per i punti associati di questi punti che si ottengono cambiando il segno a una coordinata (dato che questi punti esistano); passano per i punti pei quali due coordinate sono nulle; infine se contengono un punto, contengono anche il suo coniugato. Si possono poi determinare i coefficienti in modo che la curva passi per due coppie di punti coniugati.

In particolare, se nella prima i coefficienti sono a^2, b^2, c^2 e le coordinate sono le baricentriche (α, β, γ) e se nella seconda i coefficienti sono bc, ca, ab e le coordinate sono certe coordinate che io chiamo gergonniane perchè il punto di Gergonne è il centro dell'involuzione corrispondente, le due equazioni rappresentano la stessa cubica che passa per i vertici, pel baricentro, per l'ortocentro per i punti di Gergonne e di Nagel e per i loro associati; se passa poi per un punto, passa anche per il suo reciproco e per il suo coniugato gergon=

riano; la curva taglia i lati, oltre che nei vertici, nei punti isotomici dei piedi delle altezze.

Le stesse equazioni cogli stessi coefficienti rappresentano pure una stessa cubica, i cui punti corrispondono a quelli della precedente, se la prima equazione è espressa in coordinate circumcentriche e la seconda in coordinate incentriche, sistemi cioè che danno origine a involuzioni che hanno per centri il circumcentro e l'incentro. Questa curva incontra la precedente nei vertici, nell'ortocentro e nei punti isotomici dei piedi delle altezze, passa per l'incentro, per gli excentri e per il circumcentro e se contiene un punto, contiene anche il suo coniugato isogonale e il suo coniugato circumcentrico, cioè il suo simmetrico rispetto al circumcentro.

Queste ed altre osservazioni mi spingono a chiederle il suo sapiente consiglio. Le pare che il punto di vista da me seguito sia nuovo e fecondo? Le sarò gratissimo se Ella vorrà onorarmi di una franca risposta.

Accetti intanto coi miei rispettosi saluti, l'espressione della mia profonda stima.

Suo devot.mo

Giovanni Biasi

Via Roma. 27.

P.S. Lessi nella prefazione del libro dell'Alasia „La recente geometria del triangolo" di certe coordinate d'inerzia da Lei introdotte. Mi farebbe cosa graditissima se, scrivendomi, avesse la cortesia di indicarmi in quale periodico potrei prenderne notizia. (Mi basterebbe conoscerne la definizione.) G. B.