Ch.mo professore,

Come vede ho ritentata la soluzione del problema nel caso più generale, ed in ciò mi sono giovato, dietro il suo consiglio, dei bei lavori del prof. Pincherle. Non ho creduto indispensabile venire a discorrere di soluzioni formali ed effettive, interessandomi soltanto di indicare una via, se esiste, per raggiungere quest'ultime. Prima di trascrivere la Memoria per intero mi permetto di mandarle questa parte per sentire la sua opinione in proposito, e per sapere se mi consiglia qualche altra modificazione rispetto alla prima parte dove espongo tutta la parte letteraria relativa all'argomento.

La soluzione che le presento è un po' lunga, ma non saprei fare altrimenti, - la prego vivamente di leggerla e di scrivermi subito in proposito.

Ho ricevuta ieri la sua Nota, che leggerò tosto che posso, intanto le presento i miei ringraziamenti.

Mi creda

Obblig.mo Devot.

ABassani

Risoluzione dell'equazione funzionale

$$(1) \qquad \varphi(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\lambda e^{-xz} F(x)\,dx$$

Consideriamo finalmente il caso più generale, in cui $\varphi(x)$ è una funzione analitica uniforme senz'altra particolare ipotesi sulla sua natura.

Indichiamo con $\Omega(y,z)$ una funzione a due variabili indipendenti da determinarsi, e, posto

$$(2) \qquad \int_0^\infty e^{-xz}\,\Omega(y,z)\,dz = \Lambda(x,y)$$

$$(3) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_\lambda \Lambda(x,y)\,\varphi(x)\,dx = \psi(y),$$

dove λ è una linea chiusa da tracciarsi nel piano della variabile x, lungo la quale la funzione $\varphi(x)$ non è mai discontinua, assoggettiamo la funzione arbitraria $\Lambda(x,y)$ alla condizione di verificare indipendentemente da φ, almeno per certe parti del piano y, la relazione

$$(4) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_\lambda \Lambda(x,y)\,\varphi'(x)\,dx = \psi'(y).$$

Integrando per parti la (4), nell'ipotesi che sia verificata la condizione ai limiti

$$\left[\Lambda(x,y)\,\varphi(x)\right]_\lambda = 0,$$

si ha

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_\lambda \Lambda'_x(x,y)\,\varphi(x)\,dx = \psi'(y),$$

mentre dalla (3), derivando, si ottiene

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\lambda \Lambda'_y(x,y)\,\varphi(x)\,dx = \psi'(y).$$

Dal confronto di quest'ultime si ricava

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\lambda \left[\Lambda'_x(x,y) + \Lambda'_y(x,y)\right]\varphi(x)\,dx = 0,$$

la quale sarà verificata indipendentemente da φ se si prende

$$(5) \qquad \Lambda'_x(x,y) + \Lambda'_y(x,y) = 0.$$

Ma, derivando la (2) rispetto ad x ed y, si ottiene

$$\Lambda'_x(x,y) = -\int_0^\infty z\,e^{-xz}\,\Omega(y,z)\,dz$$

$$\Lambda'_y(x,y) = \int_0^\infty e^{-xz}\,\Omega'_y(y,z)\,dz$$

e perciò, in causa della (5), si ha

$$\int_0^\infty \left[\Omega'_y(z,y) - z\,\Omega(z,y)\right] e^{-xz}\,dz = 0.$$

Ora notiamo che il problema, che consiste nel risolvere rispetto a $\varphi(x)$ un'equazione della forma $\int \varphi(x)\,dx = 0$, è generalmente indeterminato; ma se si vuole che ~~questa~~ la nostra equazione sia verificata indipendentemente dai limiti d'integrazione basterà porre

$$\Omega'_y(z,y) - z\,\Omega(z,y) = 0\,,$$

che integrata ci dà

$$\Omega(z,y) = H(z)\,e^{zy}\,,$$

$H(z)$ essendo la funzione arbitraria dovuta all'integrazione, la cui determinazione dipenderà da una determinazione speciale di $\Lambda(x,y)$ e dalli limiti dell'integrazione.

Ora $\Lambda(x,y)$ è una soluzione dell'equazione (5), perciò sarà della forma $\Lambda(x-y)$ conservando al simbolo Λ il significato di funzione arbitraria. Dunque, supposto p.e. di prendere

$$\Lambda(x,y) = \sum_1^n \frac{a_n}{(x-y)^n}\,,$$

sostituendo si avrebbe

$$\int_0^\infty e^{-z(x-y)} H(z)\,dz = \sum \frac{a_n}{(x-y)^n}$$

e perciò, sotto determinate condizioni come abbiamo dimostrato precedentemente, si avrebbe pure

$$H(z) = \sum_1^n \frac{a_n z^n}{n!}\,.$$

Determinata così con le condizioni volute la funzione $\Omega(z,y)$, passiamo a trovare una novella funzione arbitraria $\Theta(y,z)$ e una linea d'integrazione ς, tali che almeno per certe parti del piano z convenientemente scelte e per ogni φ finita e continua in tutti i punti della linea ς, si abbia

$$(6)\quad \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_\varsigma \Theta(y,z)\,dy \int_\lambda \Lambda(x-y)\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2i\pi}\int_\varsigma \Theta(y,z)\,\varphi(y)\,dy = \varphi(z)\,.$$

Allora, avuto riguardo alla (4), è facile vedere che si avrà pure

$$\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_\varsigma \Theta(y,z)\,dy \int_\lambda \Lambda(x-y)\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2i\pi}\int_\varsigma \Theta(y,z)\,\varphi'(y)\,dy = \varphi'(z)$$

onde risulta che la funzione Θ è un'arbitraria della stessa natura della funzione Λ ed è una soluzione dell'equazione a derivate parziali (5), perciò si può scrivere sotto la forma $\Theta(y,z) = \Theta(y-z)$.

Ora per determinare Θ si osservi che la (6), sotto le condizioni volute dal teorema generale di Cauchy, è soddisfatta se si pone

$$(7)\quad \frac{1}{2i\pi}\int_\varsigma \Theta(y-z)\,\Lambda(x-y)\,dy = \frac{1}{x-z}\,.$$

~~Allora~~ In supposto scrivendo $\Theta(y-z)$ sotto la forma $\sum_1^n \frac{b_n}{(y-z)^n}$ e conservando per $\Lambda(x-y)$ l'ipotesi anzidetta $\Lambda(x-y) = \sum_1^n \frac{a_n}{(x-y)^n}$ si arriva subito col concetto di residuo a determinare i coefficienti b per mezzo dei coefficienti a, purchè l'integrazione si faccia lungo un circolo ς descritto intorno al punto

$y=0$ e lungo il quale le due serie $\Lambda(x-y)$ e $\Theta(y-z)$ siano uniformemente convergenti. Infatti (supposto che questa condizione sia verificata) è facile vedere che, indicando con R il coefficiente di $\frac{1}{y}$ nello sviluppo del prodotto delle due serie in questione, si ha

$$R = b_1\left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots\right) + (b_1 z + b_2)\left(\frac{a_1}{x^2} + \frac{2a_2}{x^3} + \frac{3a_3}{x^4} + \cdots\right)$$

$$+ (b_1 z^2 + b_2 z + b_3)\left(\frac{a_1}{x^3} + \frac{3a_2}{x^4} + \frac{6a_3}{x^5} + \cdots\right) +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

e quindi, eguagliando R allo sviluppo di $\frac{1}{x-z}$ secondo le potenze crescenti di z, si trova il sistema di equazioni

$$b_1 a_1 = 1\ ,\quad b_1 a_2 + b_2 a_1 = 0\ ,\quad b_1 a_3 + 2b_2 a_2 + b_3 a_1 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cancel{b_1 a_{n+1} + (n+1) b_2 a_n + \frac{(n+1)(n)}{2!} b_3 a_{n-1} + \cdots + b_{n-1} a_1 = 0}$$

$$b_1 a_{n+1} + n b_2 a_n + \frac{n(n-1)}{2!} b_3 a_{n-1} + \cdots + b_{n+1} a_1 = 0$$

dalle quali si ricavano successivamente i coefficienti b.

Ciò fatto, se si tiene presente la (1) e nella (6) si scrive Φ in luogo di φ, si ottiene

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \Theta(y-z)\,dy \int_0^\infty \Omega(x,y)\,\varphi(x)\,dx = F(z)$$

ed invertendo le integrazioni e ponendo

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \Theta(y-z)\,\Omega(x,y)\,dy = \Phi(x,z),$$

si ha in ultima analisi

$$F(z) = \int_0^\infty \Phi(x,z)\,\varphi(x)\,dx,$$

la quale, avuto riguardo a tutte le condizioni stabilite, risolve il problema nel caso generale.