Groningue 15 Août 1894

A. M. E. Cesàro
professeur en mathématiques
à
Naples.

Monsieur.

Dans le journal Mathésis"
(n° de Août-Septembre) j'ai lu votre article
et la solution de votre problème, que vous
avez placée dans l'Intermédiaire des
Mathématiciens, d'où MM. Poincaré
et Kluyver ont donné aussi des solutions.
M'est-il permis de vous envoyer
encore une solution de cette problème

fondée sur la dégénérescence des fonctions elliptiques?

J'espère, que vous trouvez bonne ma solution.

Agréez, monsieur, l'assurance de la haute considération de

Votre dévoué serviteur
W. A. Poort.
Groningue
Hollande.

Démontrer que, si q est dans le voisinage de 1, on a l'égalité asymptotique:

$$1+2q+2q^4+2q^9+\dots = \sqrt{\frac{\pi}{1-q}}.$$

On voit directement que le premier membre est égal à ϑ_3. q a la valeur de q $e^{\frac{\pi i \omega_3}{\omega_1}}$ et pour $q=1$, on a $\omega_1=\infty$; ~~et~~ dans ce cas:

$$\omega_3 = \frac{i\pi}{\sqrt{12 e_1}} \quad ; \quad e_3 = -2e_1. \quad \text{--- (1)}$$

Parce que q est dans le voisinage de 1, on devrait poser:

$$\omega_3 = (1-\varepsilon)\frac{i\pi}{\sqrt{12 e_1}} \quad ; \quad e_3 = -2e_1(1-\varepsilon)$$

ε désignant une quantité, qui s'évanouit quand q devient égal à 1. En négligeant cette quantité infiniment petite, on peut employer les formules (1)

Donc:

$$q = e^{\frac{\pi i \omega_3}{\omega_1}} = e^{-\frac{\pi^2}{\omega_1\sqrt{12 e_1}}} = 1 - \frac{\pi^2}{2\omega_1\sqrt{3e_1}} =$$

$$= 1 - \frac{\pi^2}{2\omega_1\sqrt{e_1-e_3}} \dots$$

D'où suit:

$$\vartheta = \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3} = \sqrt{\frac{\pi}{1-q}}$$

Mais on a aussi:

$$\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1-e_3} = \vartheta_3$$ (v. Halphen Traité des fonct. ell. I pag. 265, 5 et A)

donc :

$$\sqrt{\frac{\pi}{1-q}} = \vartheta_3 = 1+2q+2q^4+2q^9+\text{———}$$

Dans la livr. d'Août-Sept. de Math., M. E. Ce a donné, par des moyens élém., la form. plus approchée $\cancel{\frac{3+q}{4}}$

$-\,-\ \cancel{\frac{\pi}{4}\sqrt{1-q}}$ $\quad 1+2q+2q^4+\dots = \frac{3+q}{4}\sqrt{\frac{\pi}{1-q}}$

p. 138, l. 4 et 10, au lieu de $\frac{7}{p}$ lisez [illegible]