N.° 951. (Ch. Hermite). «La formule di Lagrange dà, per la soluzione dell'equazione $z = x f(z)$ la serie

$$z = \sum \frac{x^n D_z^{n-1} f^n(z)}{\lfloor n} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

convenendo di fare $z=0$ nella quantità $D_z^{n-1} f^n(z)$.

Supponiamo che si abbia $f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$

e rappresentiamo con N il coefficiente di z^{n-1} nello sviluppo della potenza $f^n(z)$; si ha anche $z = \sum \frac{N}{n} x^n$.

Premesso ciò ~~...~~ si domanda di provare che $\frac{N}{n}$, che è una funzione intera di $A_0, A_1, \ldots$ ha tutti i coefficienti numerici interi; ecc. . . »

In vero messo $A_1 z + A_2 z^2 + \ldots = Z$ risulta

$$f^n(z) = (A_0 + Z)^n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} A_0^{n-i} Z^i ;$$

Intanto il coefficiente di z^{n-1} in Z^i è (con notazione del Prof. E. Cesàro*)

$$\int_{n-1}^{i} A_x$$

dunque

$$N = \sum_{i=0}^{i=n} \left[\binom{n}{i} A_0^{n-i} \int_{n-1}^{i} A_x \right],$$

d'altra parte, è noto che

$$\int_{n-1}^{i} A_x = \sum A_{x_1} A_{x_2} \ldots A_{x_i} \qquad (1)$$

il sommatorio essendo esteso a tutte le soluzioni dell'equazione

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_i = n-1$$

e quindi indicando con C il coeff. numerico relativo ad una determinata soluzione $x_1 x_2 \ldots x_i$ (prescindendo dall'ordine), C = al numero delle permutaz. distinte di tali elementi x onde C = n.° intero ed inoltre il coeff.te numerico di un termine qualunque in N è della forma

$$\binom{n}{i} C.$$

Notiamo ora che $\frac{n-1}{i} C$ è anche un numero intero, imperocchè ~~.~~, la funzione ~~se mettiamo~~

$$P = \sum B_{x_1} A_{x_2} \ldots A_{x_i}$$

(ove il sommatorio è esteso come nella (1)) ~~di ...~~ è a coeff.ti numerici interi, e se in essa facciamo lo sviluppo completo $B_x = x A_x$ conserverà tale qualità e diventerà uguale a

$$\frac{n-1}{i} \int_{n-1}^{i} A_x .$$

D'altronde $\binom{n}{i} C$ sono i coefficienti numerici, che si presentano nello sviluppo (con la formula di Waring) della somma delle potenze $(n-1)^{me}$ delle radici di una equazione mercè i coefficienti di essa equazione ed è noto che tali coefficienti numerici sono tutti interi.

Premesso ciò si possono fare 2 sole ipotesi distinte. 1.° $(n-1, i) = 1$ cioè i primo con

---

* E. Cesàro – Algorithme isobarique – Nouv. Ann. (Serie (3) tome III pag 560 1884.

$n-1$, 2° $\overbrace{i \text{ primo con } n}^{(n,i)=1 \text{ cioè}}$.

1ª Ipotesi. $(i, n-1) = 1$. $\qquad \frac{N}{n} = \frac{1}{n}\binom{n}{i} C = \frac{1}{i}\binom{n-1}{i-1} C$.

Si è dimostrato essere $\frac{n-1}{i} C$ = n° int. ma $(n-1, i) = 1$ dunque

$\frac{1}{i} C$ = n° intero e lo stesso potrà dirsi di $\frac{N}{n}$.

2ª Ipotesi. $(i, n) = 1$. $\qquad \frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1}$ = n° intero ma $(n, i) = 1$ dunque $\frac{1}{i}\binom{n-1}{i-1}$ = n° intero

e quindi $\frac{N}{n} = \frac{1}{i}\binom{n-1}{i-1}$ [illegible] lo stesso potrà dirsi di $\frac{N}{n}$.

In ogni caso resta dimostrato il teorema —

Una soluzione è stata inviata all' "Interm."
nello stesso mese di Gennajo — (Vedi copertina del fascicolo di Febbrajo)

2 Agosto 1897

Carlo Pietrocola
(Salita Stella 10)

Gentilissimo Professore

La prego esaminare quanto sopra e se le pare inviare la soluzione all' Intermédiaire anche condensandola —

Suo obbl.mo
C. Pietrocola