Napoli Luglio 95

Gentilissimo Professore,

Nell'andare a rileggere le mie prime carte sul teor. di St. e Cl. ho notato che nella dimostrazione a lei trascritta di questo teorema si è nella copia introdotto un errore. Nella formola di ricorrenza donde si trae il teor. fondamentale, invece di

$$\cancel{\left[S(n)+h(n)\right]^q=(n-1)S_q(n-1)-S_{q+1}}$$

$$\left[S(n)+h(n)\right]^q=n\,S_q(n)-S_{q+1}(n)$$

deve essere scritto

$$\left[S(n)+h(n)\right]^q=(n-1)S_q(n-1)-S_{q+1}(n-1).$$

In questo punto io accenno a relazioni quadratiche fra i n.i di Bernoulli che si potrebbero ottenere da questa formola con l'eguaglianza dei coefficienti delle stesse potenze di n.

Tali relazioni sono conosciute e sono

$$(B+B')^m+mB_{m-1}+(m-1)B_m=0 \quad \text{per } m>0.$$

In quelle stesse carte ho trovata un'altra dimostraz. del teor. di St. e Cl. molto più semplice elementare e diretta e che io le trasferisco che se volesse sostituirla a quella già inviatale –

Dall'identità $n\frac{x}{e^x-1} = \frac{nx}{e^{nx}-1} \cdot \frac{e^{nx}-1}{e^x-1}$ si deduce

$$ne^{Bx} = e^{[nB+S(n)]x}$$ e quindi

$$[nB+S(n)]^q - nB_q = 0 \qquad (1)$$

Il teor. di St. e Cl. è verificato evidentem.te per B_1 e B_2: ammesso dimostrato fino a B_{q-2} lo si dimostra per B_q.

Essendo j un n° primo qual. si potrà porre

$$B_m = A_m - \frac{\mu_m}{j^{h_m}}.$$

in cui A_m non contiene a denominatore j e μ_m è primo con j ed inferiore a j^{h_m}. Il teor. di St. e Cl. consiste nelle eguaglianze $\mu_m = 1$, $h_m = \varepsilon\frac{m}{j-1}$

~~Avendolo ammesso per m fino a q-2~~

~~risulterà $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{q-2}$~~

Mettiamo poi per semplicità $\mu_q = x$, $h_q = \nu$.

Si faccia ora nella (1) $n=j$ e si divida tutto per j, * supponendovi inoltre q pari.

La sola parte dello sviluppo che potrà contenere j a denominatore è (per l'ipotesi fatta)

Si ha $j^q B_q + \frac{1}{j} S_q(j) - B_q$

* e notando essere $S_q(j) \equiv -\varepsilon\frac{q}{j-1} \pmod{j}$

e conservando di questa espressione la sola parte che contiene j a denominatore viene

$$\frac{x}{j^\nu}\{j^q - 1\} + \frac{1}{j}\varepsilon\frac{q}{j-1} = \text{intero} –$$

e quindi essendo $x(j^q-1)$ primo con j, affinchè abbia luogo la precedente relazione occorre e basta che sia

$$\nu = 1 \; ; \quad x = \varepsilon\frac{q}{j-1} \quad \text{q. h. d.}$$

Ossequiandolo mi raffermo

dev.mo

C. Pietrocola