Gand, quai des Dominicains, 6

le 1er mars 1883

Monsieur

Depuis longtemps, je me propose de vous écrire touchant votre article relatif à la sommation des séries que vous trouverez ci-joint, chargé de ratures, raturées elles-mêmes. Voici mes observations

I. L'égalité (1) suffit pour définir $F(x)$ pour les valeurs entières de n, mais non pour les valeurs quelconques. C'est (2) qui, pour x quelconque, définit <u>imparfaitement</u> $F(x)$, comme intégrale aux différences de $f(x)$. En ajoutant à (2), l'égalité (1), c'est-à-dire, au fond en prenant parmi les intégrales aux différences de fx l'une de celles qui s'annule pour $x=0$, $F(x)$ est encore imparfaitement déterminé, mais suffisamment toutefois pour la suite. Il me semble qu'il aurait ~~fallu~~ mieux valu dire:

Soit $f(x) = F(x) - F(x-1)$,

$F(x)$ étant choisi de manière que $F(0)=0$, ce qui peut toujours se faire, puisque l'on peut prendre pour $F(x)$ l'expression $\varphi x - \varphi 0$, φx étant une expression telle que $\varphi(x) - \varphi(x-1) = fx$; puis en conclure (1)

II. Notons bien que la formule (3) est une conséquence de (2) et de $F'0 = 0$ et non de (1). Si (2) n'existait pas, s'il n'y avait pas une fonction dérivable Fx, telle que $F(x) - F(x-1) = fx$, (3) ne serait pas établi. Cette relation (3) n'a pas d'autre sens que ceci: c'est ce que l'on obtient en faisant $x=0$, dans

$$f'_x(1+x) + f'_x(2+x) + \cdots + f'_x(n+x) = F'_x(n+x) - F'_x(x)$$

III. J'écris ce paragraphe un peu plus longuement : Soit Il y une fonction $F(p, x)$, telle que $F(p,x) - F(p, x-1) = x^p$ et s'annulant pour $x = 0$. On a donc

$$(1+x)^p + (2+x)^p + (3+x)^p + \dots + (n+x)^p = F(p, n+x) - F(p, x),$$

puis

$$p\left[(1+x)^{p-1} + (2+x)^{p-1} + \dots + (n+x)^{p-1}\right] = F'_x(p, n+x) - F'_x(p, x)$$

ou encore

$$F'_x(p, n+x) = p\left[F(p-1, n+x) - F(p-1, x)\right] + F'_x(p, x)$$

Intégrons indéfiniment, par rapport à <u>x</u>, qui est la seule variable continue. Il viendra

$$F(p, n+x) = p\int\left[F(p-1, n+x) - F(p-1, x)\right]dx + F(p, x) + C$$

ou

$$F(p, n+x) - F(p, x) = p\int\left[F(p-1, n+x) - F(p-1, x)\right]dx + C$$

Pour $x = 0$, le premier membre deviendra S_p. Mais pour $x = 0$, que deviendra ~~t~~ le second ? On ne peut pas faire $x = 0$, sous le signe d'intégration, car dans cette hypothèse elle n'aurait plus de sens. En outre, la constante C, d'après le mode même ~~dont~~ de son introduction dans la formule est une fonction de <u>n</u>, quelconque, ~~et sauf~~ et de p, les constantes arbitraires étant toujours des fonctions quelconques des constantes données.

Le défaut de votre exposition consiste à avoir ~~considéré~~ ~~B~~ traité $F'_x(p, n+x)$ pour $x = 0$, comme une fonction de n intégrable par rapport à <u>n</u>. ~~Cela n'est possible que si~~ Cela n'est pas permis puisque l'intégration, comme la dérivation suppose <u>n</u> variable d'une manière continue.

J'ai lu bien des fois la démonstration de Prouhet, sans parvenir à me persuader de ~~su~~ l'exactitude de sa formule, parce qu'il y a un postulat caché dans sa dernière intégration.

Excusez, Monsieur, la forme de cette lettre, écrite au courant de la plume et croyez à mes sentiments de considération la plus distinguée

P. Mansion

P.S. Prochainement, je vous renverrai vos questions proposées, en vous priant d'y joindre un aperçu des solutions. Sans cela, je ne puis, sans un travail très grand, juger de leur degré de difficulté.