Monsieur

Je vous remercie sincerement pour votre reponse à propos de ma question 372. Votre remarque et très importante.

Je pense qu'il faut poser la question suivante:

Trouver toutes les fonction des coefficients de l'équation

$$(1) \quad A_1 x^n + A_2 x^n y + \dots = 0$$

de la courbe osculatrice d'ordre n, qui ne peuvent rester constantes sans que la courbe se reduise à une courbe d'ordre n.

La solution de cette question se reduit à la considération des solutions singulieres des certaines équations differentielles.

Prenons une fonction quelconque

$$f(A_i, A_j, \dots) = \text{const}$$

En differentiant, nous obtenons

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial A_i} dA_i + \frac{\partial f}{\partial A_j} dA_j + \dots = 0$$

Les coefficients ~~A~~ A_i sont des fonctions determinées de

$$(3) \quad x, y, y', y'', \dots y^{(k)}$$

où $k = \frac{n^2+3n-2}{1.2}$

En différentiant nous obtiendrons

$$dA_i = M B_i \, dx$$

où M est le facteur qui contien la dérivées $y^{(n+1)}$ et donne égalé à zero l'équation différentielle des courbes d'ordre n.

L'équation (2) peut s'écrire de la manière

$$M \left(\frac{\partial f}{\partial A_i} B_i + \frac{\partial f}{\partial A_j} B_j + \dots \right) = 0$$

Nous voyons que l'équation différentielle

$$(4) \quad \dots \quad f = \text{const}$$

a une intégrale generale, qui est déterminée par l'équation $M=0$ et represente la courbe d'ordre n, osculatrice des courbes représentantes les solutions singulières de l'équation (3), données par l'équation

$$(5) \dots \quad \frac{\partial f}{\partial A_i} B_i + \frac{\partial f}{\partial A_j} B_j + \dots = 0$$

Pour que l'équation (5) ne donne que des courbes d'ordre n il faut et il suffit, que l'équation (5) soit equivalente à l'équation (1) de la courbe d'ordre n.

Cette demande permet de determiner toutes les fonctions, satisfaisantes aux conditions de la question.

Voici les calcul pour le cas le plus simple $n=1$

Prenons l'équation de la tangente

$$y = ax + b$$

où

$$(1) \ldots\ a = y', \quad (2) \ldots\ b = y - xy'$$

En différentiant nous obtenons

$$a' = y'' \quad b' = -xy''$$

Prenons une fonction quelconque

$$f(a,b) = \text{const}.$$

En différentiant nous obtenons

$$y''\left(\frac{\partial f}{\partial a} - x\frac{\partial f}{\partial b}\right) = 0$$

Pour resoudre la question il faut determiner la fonction f pour que l'équation

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial a} - x\frac{\partial f}{\partial b} = 0$$

soit équivalente à une équation du premier dégré

$$(4) \quad lx + my + n = 0$$

En éliminant entre les équations (1), (2), (3) et (4) les quantités x, y, y' nous obtenons

$$(l+ma)\frac{\partial f}{\partial a}+(n+mb)\frac{\partial f}{\partial b}=0$$

une équation aux différences partielles du premier ordre. En integrant nous obtenons la plus generale rélation entre a et b, qui donne une droite, en forme

$$La+Mb+N=0$$

L, M, N étant constants

Veuillez, Monsieur, agréer l'expression de mes sentiments de la plus haute estime

D. Gravé

19/31 Aout 1895.

Saint-Pétersbourg
B. O. 14 ligne 31.