Sul criterio di convergenza fornito da $\sqrt[n]{u_n}$.

È noto che, se esiste lim. $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, esiste ancora lim. $\sqrt[n]{u_n}$ che è eguale al primo ed è pur noto che non è vero l'inverso; se è, p. es.,

$$\lim. \frac{a_{n+1}}{a_n}=1 \qquad u_n=\theta_n \cdot a_n q^n$$

e θ_n indica il numero dei divisori di n, si ha

$$\lim. \sqrt[n]{u_n}=q$$

mentre $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ non tende ad alcun limite. Per ciò l'espressione $\sqrt[n]{u_n}$ può decidere sulla convergenza o divergenza di serie per le quali non si saprebbe decidere considerando $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Devesi tuttavia riconoscere che la maggior importanza del criterio fornito da $\sqrt[n]{u_n}$ relativamente a quello fornito da $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ non è che apparente perchè, se finisce per esser sempre $\sqrt[n]{u_n}<\lambda<1$ oppure $\sqrt[n]{v_n}>\mu>1$, a partire da un certo valore di n si avrà sempre, k essendo un intero positivo prefissato arbitrariamente grande, $u_n<\frac{1}{n^k}$ oppure $v_n>n^k$ e ciò basta per riconoscere immediatamente la convergenza di $u_1+u_2+\dots$ oppure la divergenza di $v_1+v_2+\dots$.

F. Giudice.