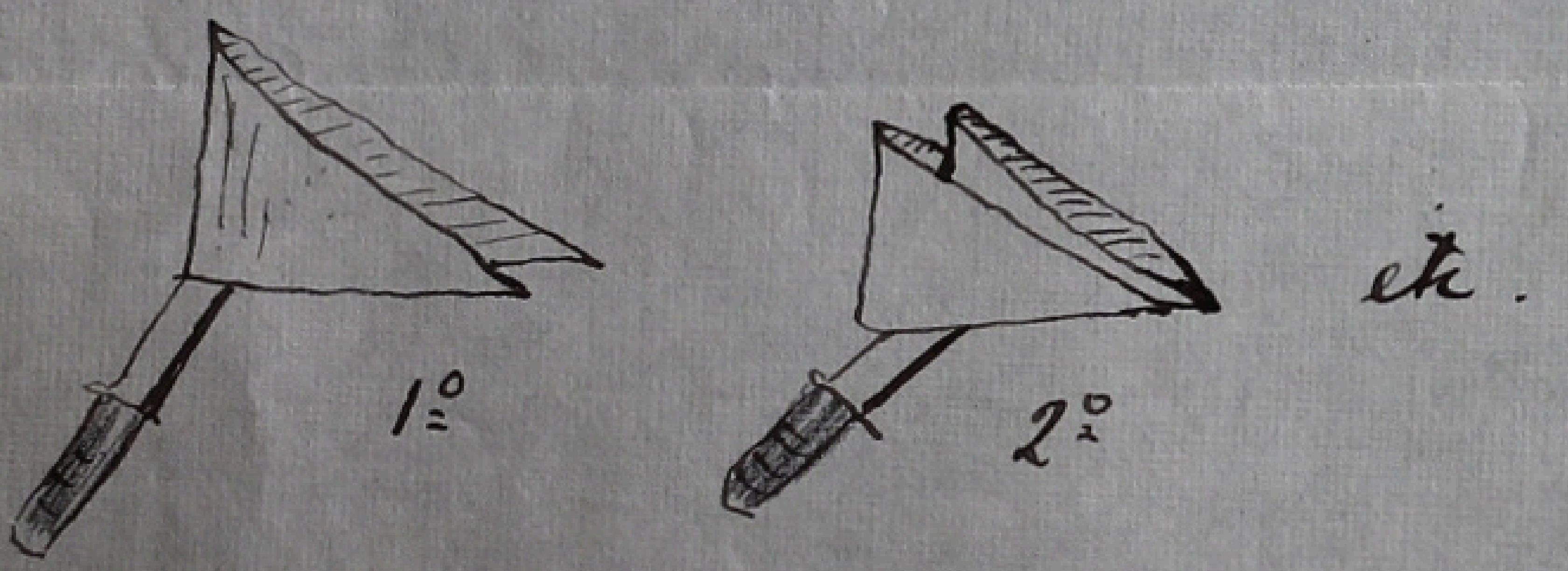
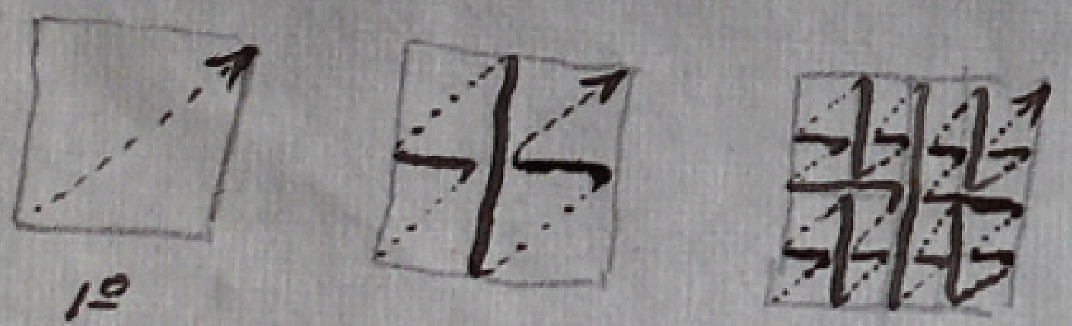
Illustre Professore,

Col massimo piacere ho letto le sue remarques sur la courbe de von Koch. La sua curva che riempie il triangolo è immensamente più bella di quella che io avevo immaginata. Per la fabbricazione del modello di carta, come quello che Ella mi ha mandato si può accelerare molto la costruzione piegando ogni volta in due il triang. rettangolo lungo l'altezza uscente dall'ang. retto e tagliando poi quasi fino al vertice: così:



1º 2º etc.

- Ho poi voluto trovare una curva che riempia il triangolo, analoga a quella di Lebesgue, di cui gli stadî successivi sono:

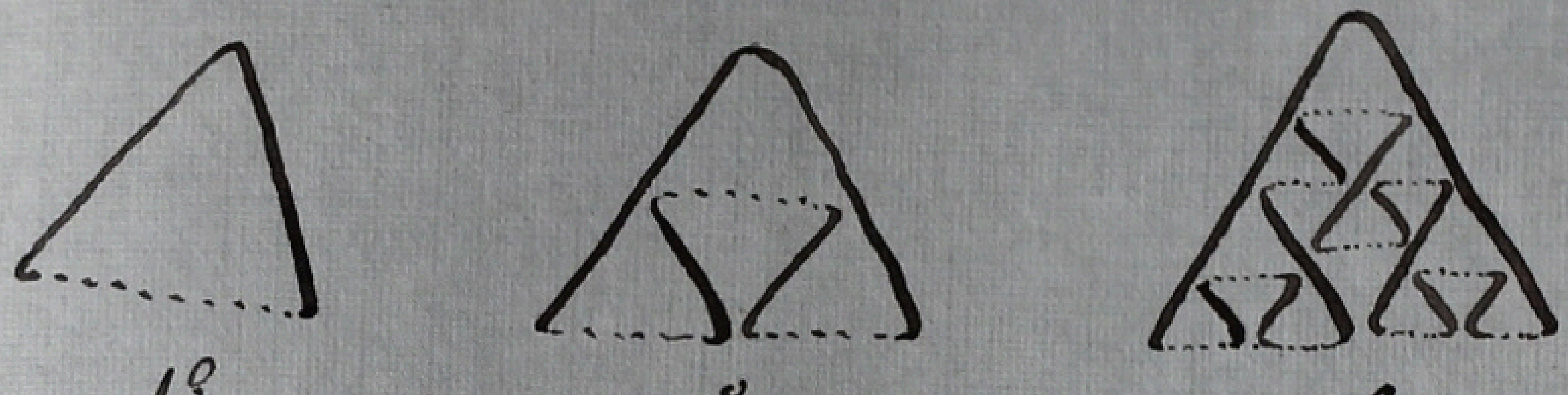


1º 2º 3º

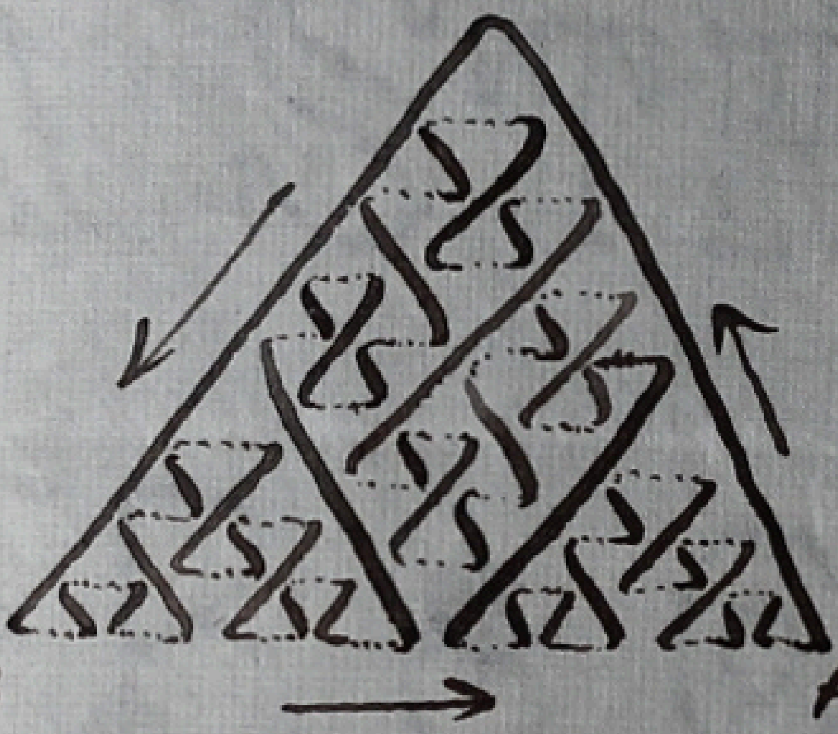
Si passa da uno stadio al successivo sostituendo alle diagonali punteggiate, la figura 2ª convenientemente ridotta.

Questa curva è già definitivamente disegnata in tutte le parti a tratto continuo, cioè ~~quelle dei~~ ~~in tutti~~ di essa fanno parte tutti i punti dei successivi reticolati, in cui si decompone il quadrato iniziale.

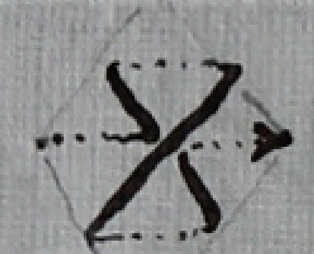
Quella per il triangolo è la seguente:



1º 2ª 3ª

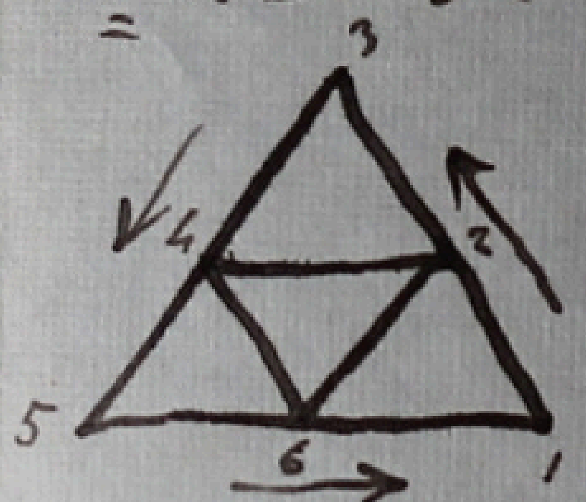


B A

Si passa da uno stadio al successivo sostituendo alle linee punteggiate la figura 2ª nei triangoli aventi la base su AB, e la figura  in tutte le celle a parallelogrammo.

Qui però, anche tutte le linee punteggiate fanno già tutte parte della curva che riempie il triangolo.

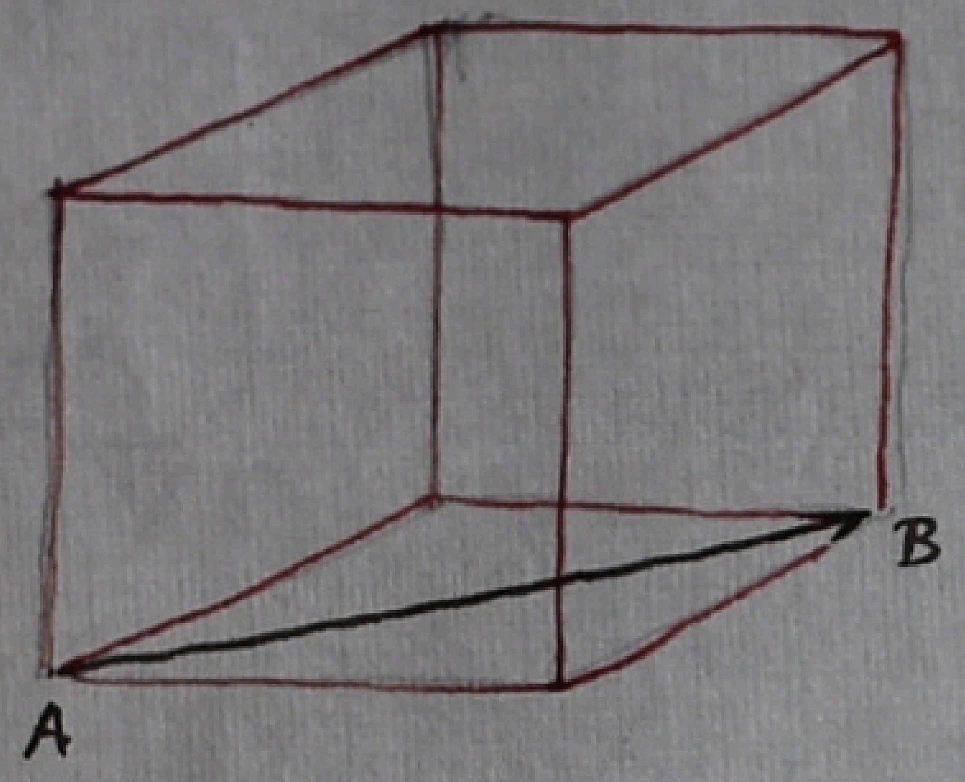
Questa curva è perciò in ogni suo stadio rappresentata da tutto un reticolato come il seguente,



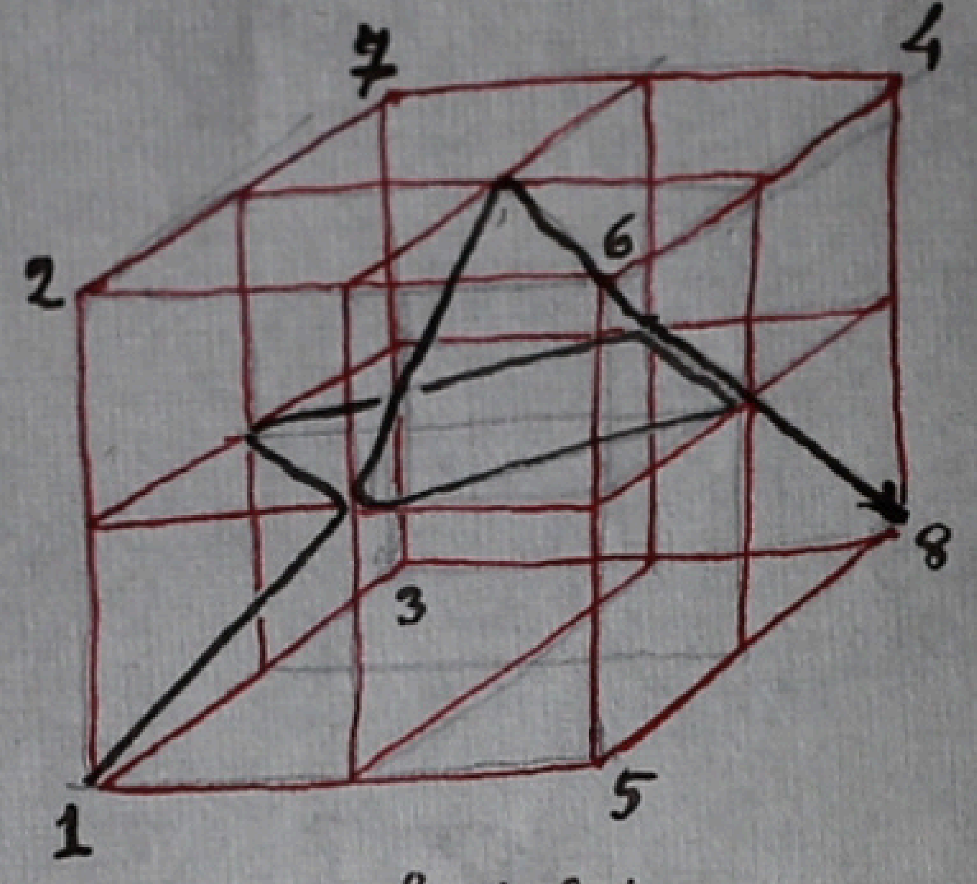
i lati del quale sono percorsi (sempre nel verso indicato dalle freccie) in un ordine conveniente, che per la figura qui sopra è l'ordine 1234564261.

Ho anche pensato a curve che riempiono un cubo.

La più semplice che ho trovato è rappresentata dai seguenti stadî:



1° stadio



2° stadio.

L'operazione elementare consiste nel passare da uno ~~ff~~ vertice A di un cubo al vertice opposto di una stessa faccia B. Si passa da uno stadio al successivo decomponendo ogni cubo in otto cubi di lato metà, e sostituendo al percorso AB il percorso 1-8, percorrendo cioè gli otto cubi parziali nell'ordine indicato dai numeri d'ordine 1...8 apposti ad uno dei loro vertici, percorrendo per ciascuno di essi una diagonale di una loro faccia.

Non mi pare difficile il costruire anche per i cubi curve analoghe a quella di Lebesgue, percorrenti cioè tutti i reticolati solidi composti dagli spigoli di tutti i cubi parziali (cioè successivam. $8, 8^2, 8^3, \dots$), camminando cioè una sola volta per tutti gli spigoli del ~~cubo~~ reticolato, escludendo soltanto gli spigoli del cubo che si vuol riempire. Esclusi questi sei spigoli, la rete restante ha tutti i suoi nodi pari (secondo la nomenclatura di Lucas) e perciò si può percorrere tutta una sola volta in molti modi: tra i quali non mi par difficile fare una opportuna scelta.

— Non ho invece saputo finora riempire con una curva un tetraedro. Le difficoltà nascono dal fatto che non so decomporlo in parti simili.

Mi creda sempre suo dev^mo

27 Gennaio 1906
Firenze, Via Ricasoli 49

Giovanni Vacca