Illustre professore,

La domanda che Ella fa nell' Int. des Math., Q. 1977, (a. 1900, p. 360), se cioè, essendo $u_1 + u_2 + \dots$ una serie convergente a termini positivi, la funzione

$$u_1 \rho(x) + u_2 \rho(x^2) + \dots$$

tenda verso un limite quando x tende verso 1, decrescendo, mi sembra abbia una risposta dai teor. I, III a pagg. 58, 59 dei suoi Elementi di Calcolo Infinitesimale. (che corrispondono al teor. a. p. 299, vol. 1 delle Lez. di Analisi infinitesimale a. 1893, del Prof. Peano).

Se infatti per intervallo (a, b) del teor. I, si prende p. es. l'intervallo $(1, 2)$, ogni termine $u_k \rho(x^k)$ è sempre minore di u_2, ed il suo limite superiore è precisamente u_2. D'altra parte quando x, variando in quell' intervallo $(1, 2)$, tende ad 1, il termine $u_2 \rho(x^2)$ tende a zero, quindi:

$$\lim \left[u_1 \rho(x) + u_2 \rho(x^2) + \dots \right] = \lim u_1 \rho(x) + \lim u_2 \rho(x^2) + \dots = 0$$

che è quanto si cercava.

– A proposito di questi teoremi nasce la domanda:

Si conoscono esempi semplici, o interessanti, di serie convergenti assolutamente ed uniformemente senza che sia convergente la serie formata coi limiti superiori dei valori assoluti dei termini, cioè di serie non soddisfacenti alle condiz. del suo teor. I (a p. 58)?

Se non ce ne fossero, questa teoria sarebbe suscettibile di notevoli semplificazioni.

– Nel Formulaire de Mathématiques (p. es. a. 1899, t. 2, n. 3 p. 107) io ho adoperato per la funzione $\beta(x)$, la notazione di Zehfuss (Grunert Archiv, a. 1850, t. 27, p. 12), $\beta(x)$. La notazione che Ella adopera nei Suoi Lavori ha forse un'origine anteriore?

Voglia perdonarmi il disturbo che io Le arreco con questa mia, e mi creda Suo Dev.mo

Giovanni Vacca

assistente alla Scuola di Calcolo Infin.

Torino 14, Gennaio 1901

Via Bogino, 4.