$$\int_0^\infty$$

$$\int_0^{1+x} f(y)\,dy = \varphi(x) f(x)$$

$f(0) = 1$

$\cancel{f(x)}$

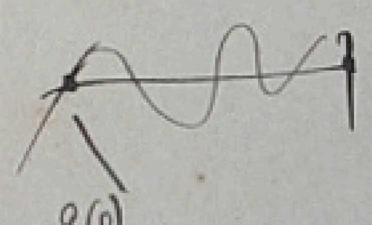
$$\int_0^1 f(y)\,dy = \varphi(0)$$

$\cancel{f(x)+\lambda g(x)}$

$f(x) + \lambda g(x)$

$$\int_0^{1+x} [\cancel{f(y)} + \lambda g(y)]\,dy = \varphi(x)\,[\cancel{f(x)} + \lambda g(x)]$$

$\cancel{f(0)+\lambda}\; g(0) = 0$



$g(0)$

$g(x+1$

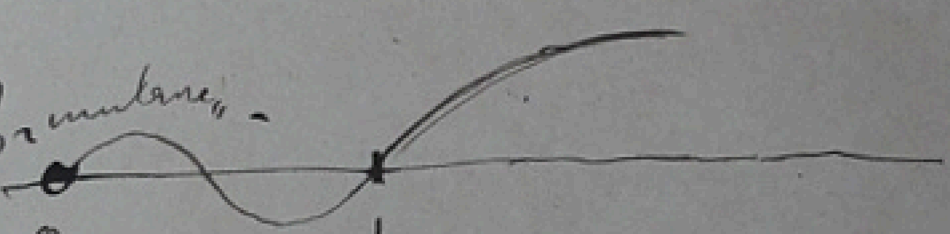
$$\left\{ \int_0^{1+x} g(y)\,dy = \varphi(x) g(x) \right.$$

$f(x) + \lambda g(x)$

$$\int_0^1 g(y)\,dy = 0 \qquad \int_1^{1+x} g(y)\,dy = \varphi(x) g(x)$$

Ch.mo Sig. Professore,

La ringrazio, prima di tutto, del prezioso dono che Ella ha voluto farmi del t. IV. del suo «Formulario».



$$\int_0^x g(y+1)\,dy = \varphi(x) g(x)$$

La ringrazio altresì dell'interesse che Ella mi porge, e che io tenti di risolvere, quantunque non sia ~~in grado~~, neppure ad indicarmi la via da seguire. Mi limito per ora ad esprimerle il dubbio che altre condizioni siano da imporre per la convergenza della funzione f, giacchè, supponendone trovata una, che renda convergente $\int_0^\infty e^{-hx\frac{\int_0^{1+x} f(y)dy}{f(x)}}dx$ (e ~~finita~~ uguale a 1 per zero), se $\varphi(x) = \frac{\int_0^{1+x} f(y)dy}{f(x)}$, è chiaro che se ne possono ottenere infinite altre $f + \lambda g$, con g funzione soddisfacente alle condizioni

$$g(0) = 0\,, \quad \int_0^1 g(y)\,dy = 0\,, \quad \int_1^{1+x} g(y)\,dy = \varphi(x) g(x)\,,$$

e ~~λ costante..~~

$\psi(x) \quad \varphi(x) g(x)$

$$g(x+1) = \varphi'(0)g(0) + \varphi(0)g'(0) + x\left[\varphi''(0)g(0) + 2\varphi'(0)g'(0) + \varphi(0)g''(0)\right] + \frac{x^2}{2}\left[\varphi'''(0)g(0) + \cdots\right]$$

$$= \psi'(0) + x\psi''(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2}\psi'''(0) \cdots = \psi'(x)$$

Dalla quale si vede che la funzione $g(x)$ possono essere ~~date~~ prendendola ad arbitrio ~~nell'intervallo (0,1)~~, per 0 ed 1, ricavando per detta ... mediante l'ultima condizione, che dà

$\cancel{g(x+1)}$ $g(1+x) = \varphi'(x)g(x) + \varphi(x)g'(x)$.