Monsieur,

Bien loin de me "fâcher", comme vous dites, je vous remercie vivement de votre lettre, et je vous suis reconnaissant pour avoir attiré mon attention sur une des lacunes graves de ma Note "Sur ..."

Je regrette seulement de ne plus être au courant de ce genre d'études, car peut que je ne suis pas à même de vous donner les explications que vous me demandez. ~~Vous citez~~ ~~Néanmoins, en relisant~~ ~~Je puis~~ Je viens de relire ma Note, comme si elle était l'œuvre d'un autre, et j'en ai eu l'impression qu'il y a ~~une~~ lacune, plutôt qu'une erreur de raisonnement.

Je me sers, en effet, de l'identité

$$\prod\left(1\mp\frac{1}{p^x}\right)e^{\pm\frac{1}{p^x}+\frac{1}{2p^{2x}}}=\frac{\prod e^{\pm\frac{1}{p^x}+\frac{1}{2p^{2x}}}}{1-\frac{1}{3^x}+\frac{1}{5^x}-\cdots}$$

~~après avoir démontré~~ non pas pour démontrer, comme vous semblez croire, la convergence de $\frac{1}{3^x}-\frac{1}{5^x}+\frac{1}{7^x}+\cdots$, mais après avoir démontré (ou cru la démontrer) ~~cette~~ cette convergence. Comment ai-je pu affirmer que cette ~~convergence~~ est une ~~fait~~ conséquence évidente de l'égalité

$$\lim_{x=\frac{1}{2}+0}\prod\left(1\mp\frac{1}{p^x}\right)e^{\pm\frac{1}{p^x}+\frac{1}{2p^{2x}}}=\prod\left(1\mp\frac{1}{\sqrt{p}}\right)e^{\pm\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{2p}}$$

c'est ce que je ne peux pas m'expliquer. J'ai ~~peut-être~~ eu sans doute, en écrivant, comme un éclair, qui m'a conduit à cette affirmation; mais je crois, comme vous, que mon raisonnement devait être faux. ~~Les raisonnements~~ Les considérations qui terminent votre lettre rendent, en effet, peu probable la possibilité de ranger ce fait parmi les raisonnements élémentaires rigoureux. — ~~Dans~~ tous les cas je ne ~~comprends pas~~ Quoiqu'il en soit, il ne me semble pas que l'erreur ait été commise de la manière que vous dites, c'est-à-dire en me servant, pour $x \geq 1$, d'une identité prouvée seulement pour $x>1$. Je peux, en effet, que dans cette hypothèse,

2 I

~~j'aurais dû~~

j'aurais expliqué la chose beaucoup plus simplement, ~~...~~   j'aurais besoin pas été franchement

$$\prod\left(1 \mp \frac{1}{p^x}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{3^x}+\frac{1}{5^x}-\cdots}$$ ~~même~~

~~même~~ pour $x > 0$; puis $\sum -\log(1-z)$ $z = \pm\frac{1}{p^x}$

$$\log\left(1-\frac{1}{3^x}+\frac{1}{5^x}-\cdots\right) = \sum\left(\pm\frac{1}{p^x}+\frac{1}{2p^{2x}}\pm\frac{1}{3p^{3x}}+\cdots\right),$$

d'où j'aurais déduit, non seulement la convergence de $\sum \pm\frac{1}{p^x}$ pour $x > \frac{1}{2}$, mais ~~encore~~ celle de

$$\sum\left(\pm\frac{1}{p^x}+\frac{1}{2p^{2x}}\right)$$

pour $x > \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{2}$, pour celle de $\sum\left(\pm\frac{1}{p^x}+\frac{1}{2p^{2x}}\pm\frac{1}{3p^{3x}}\right)$ pour $x > \frac{1}{4}$, etc.

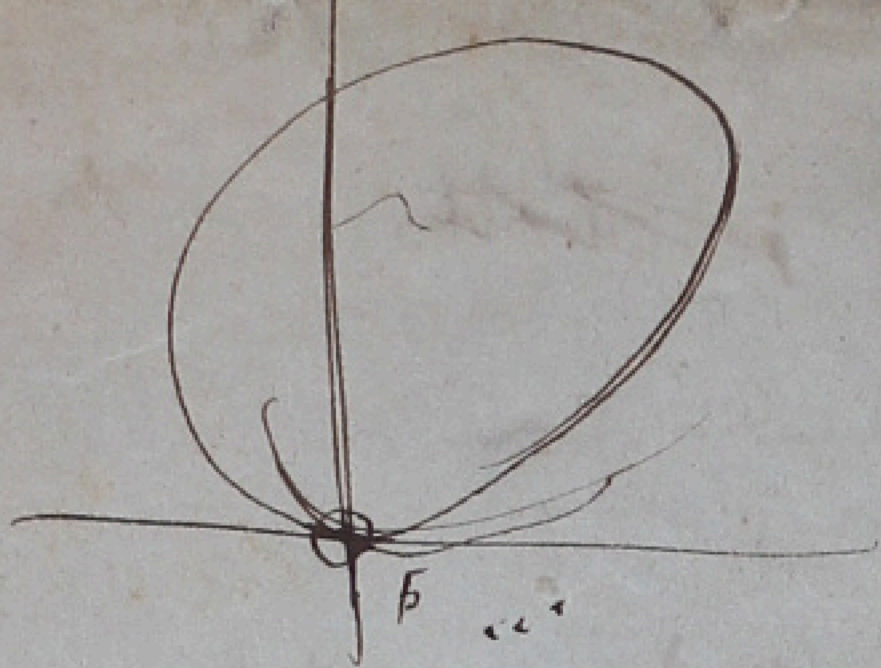
Quant au mémoire de M. Torelli, je le connais ~~que trop bien~~ fort bien, puisque c'est à moi qu'il doit d'avoir eu le prix, que je crois, naturellement, ~~fort~~ bien mérité. Les fautes qu'il peut contenir n'en ~~ôtent~~ pas le mérite principal, qui est d'être ~~un aussi bien fait~~ un exposé tendant et ~~très~~ complet ~~de l'état bien que~~ trop connu (ce qui était voulu par l'Académie), de l'état actuel de la question des nombres premiers. ~~Je crois que M. Torelli~~ Si vous voulez m'en donner la peine, je communiquerai votre lettre à M. Torelli; et si vous savez, je rappelle son attention sur des sujets qui l'intéressent beaucoup.

~~Peut-être M. Torelli pourra vous donner ma note~~

~~En attendant, permettez de recevoir un mot de ... pardon, lire vos recherches sur la ...~~ je serais fort obligé si vous voulez me donner un mot de réponse ce pour, en attendant..........!

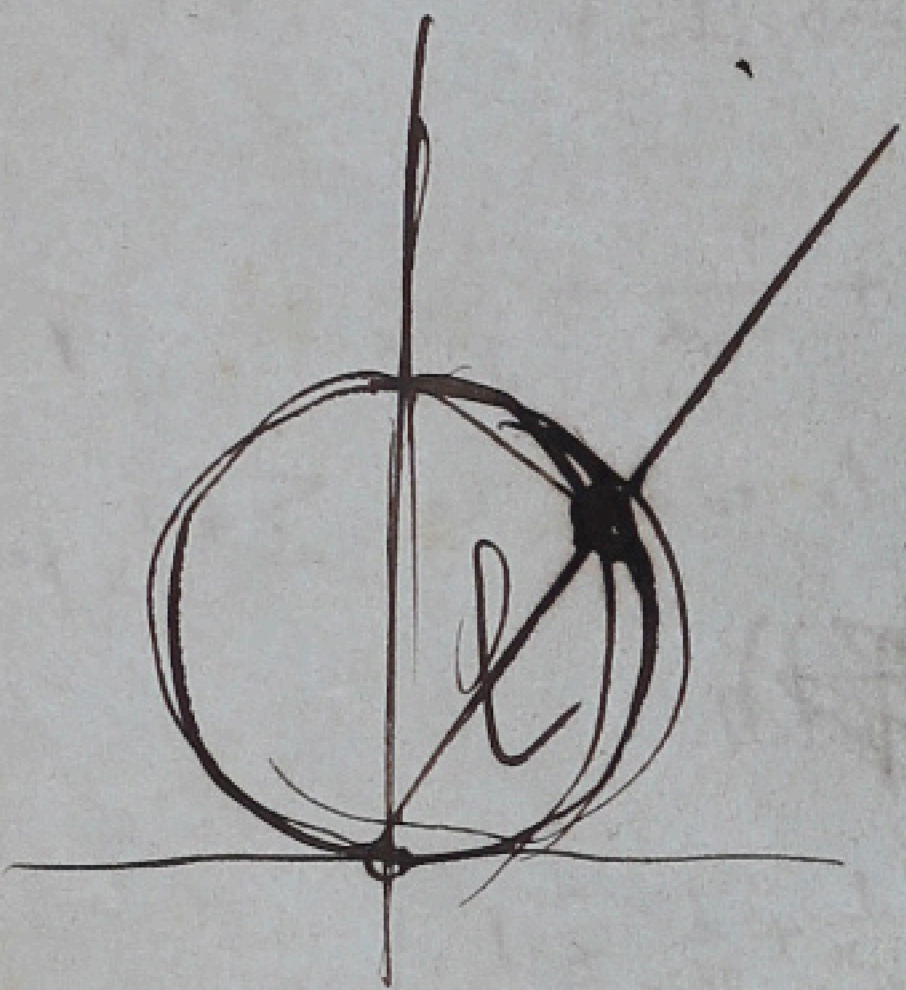
Veuillez agréer, Monsieur, l'expression de mes sentiments les plus ...

Vous agréez, Mr..., avec les remerciements le ...



$$(3\rho x-\rho_1 y)^2+\mathfrak{P}y^2=18\rho^3 y.$$

$$x^2+y^2=2\rho y$$



$$-6\rho\rho_1 xy+\rho_1^2y^2+\mathfrak{P}y^2=18\rho^3 y$$

$$+9\rho^2(2\rho-y)$$

$$-9\rho y-6\rho\rho_1 x+y(9\rho^2+5\rho_1^2-3\rho\rho_2)=0$$

$$(5\rho_1^2-3\rho\rho_2)y=6\rho\rho_1 x$$

$$y=6\rho\rho_1\cdot Q \qquad Q=\frac{12\rho^2\rho_1}{H^2-36\mathfrak{P}\rho^2}$$

$$x=Q(5\rho_1^2-3\rho\rho_2)$$

$$Q\left[(5\rho_1^2-3\rho\rho_2)^2+36\rho^2\rho_1^2\right]=2\rho\cdot 6\rho\rho_1$$

$$l^2=Q^2\left[36\rho^2\rho_1^2+(\ )^2\right]=\frac{144\rho^4\rho_1^2}{H^2-36\mathfrak{P}\rho^2}$$

$$l=\frac{12\rho^2\rho_1}{\sqrt{\ }}=\frac{12\rho\rho_1\cdot 9\rho^4}{(a^2-b^2)\mathfrak{P}^2}$$

$$a^2-b^2=\frac{9\rho^4}{\mathfrak{P}^2}\sqrt{H^2-36\mathfrak{P}\rho^2}$$

$$6\rho\rho_1 x=(5\rho_1^2-3\rho\rho_2)y$$

$$6\rho\rho_1\left(\frac{y}{\rho}-\rho\right)+6\frac{x}{\rho}(\rho\rho_2+\rho_1^2)+(5\rho_1^2-3\rho\rho_2)\frac{x}{\rho}-\frac{y}{\rho}(7\rho_1\rho_2-3\rho\rho_3)=0$$

$$\begin{array}{l|l} 6\rho\rho_1 & y-6\rho^2\rho_1+(3\rho\rho_2+11\rho_1^2)x=0 \\ -7\rho_1\rho_2 & \\ +3\rho\rho_3 & \end{array}$$

$$(3\rho\rho_2+11\rho_1^2)x+(6\rho\rho_1-7\rho_1\rho_2+3\rho\rho_3)y=6\rho^2\rho_1$$

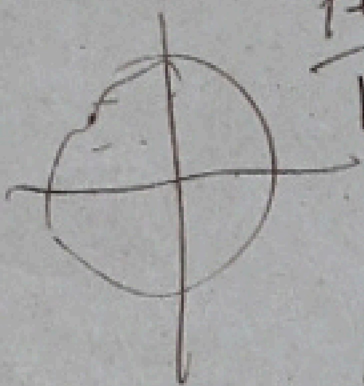
$$Q\left[(5\rho_1^2-3\rho\rho_2)(3\rho\rho_2+11\rho_1^2)+6\rho\rho_1(6\rho\rho_1-7\rho_1\rho_2+3\rho\rho_3)\right]=6\rho^2\rho_1$$

$-\int$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + 2\int \frac{(x+\frac{1}{2})^2}{(x^2+x+1)^2}\,dx$$

$\mathrm{sen}\,\theta \geq 0$

$\frac{1+\cos\theta}{|\mathrm{sen}\,\theta|} \geq 0$



$$\cancel{2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2x^2+2x+\tfrac{1}{2} = 2x^2+2x+1} \; x^2$$

$$x^2+x+1-\frac{3}{4}$$

$$= \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + 2\int\frac{dx}{x^2+x+1} - \frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$\cancel{\int \frac{dx}{x^2+px+q}}$

$$\frac{2}{3}\int\frac{dx}{\cdots} = \frac{2}{3}\int\frac{dx}{\cdot} + \frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

$\cot\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{\cdot}$

$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = |\mathrm{sen}\,\theta|\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$

$$\int\frac{x^2-x+1}{x\ -} = \frac{5}{3}\int\frac{dx}{x^2+x+1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2x+2}{x^2+x+1} + \cancel{\frac{2}{x^2+x+1}} \quad |\mathrm{sen}\,\theta|$$

$x<0$

$\cancel{x=-\frac{1}{2}}$ $\quad x=-2$

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1} = \int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{|\mathrm{sen}\,\theta|}$

$x+\frac{1}{2} = t\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{1+x^2} <$

$\cot\frac{\theta}{2} \quad \frac{1+\cos\theta}{|\mathrm{sen}\,\theta|}$

$\int \cdots$

$\frac{1+\cos\theta}{|\mathrm{sen}\,\theta|}$

$x+\sqrt{1+x^2} =$

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{x+c}{x^2+x+1} + \int\frac{(x+c)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}\,dx$$

$x=\cot\theta$

$x+\sqrt{1+x^2} =$

$1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$(x+c)(2x+1) = (\cancel{x^2+x+1}) + (x^2-x+1)$$

$= \cot\theta + \frac{1}{|\mathrm{sen}\,\theta|}$

$\cancel{2x^2+(2c+1)x+c = 2x^2+2}$

$= \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta} + \frac{1}{|\mathrm{sen}\,\theta|}$

$\cancel{x+\sqrt{1+x^2}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\cancel{(x+c)(2x+1)} =$

$\cancel{\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}}$

$$(x+c)(2x+1) = a(x^2+x+1) + b(x^2-x+1)$$

$\cancel{\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{2|\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}|}}$

$a+b=2, \quad a+b=c$

$c=2$

$\mathrm{sen}\,\theta\geq 0 \quad \frac{1+\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$

$2c+1 = a-b$

$1. \quad \frac{1-\cos\theta}{|\mathrm{sen}\,\theta|}$

$\geq 1.$

$\mathrm{sen}\,\theta<0 \quad \frac{\cos\theta-1}{\cdot}$

$\cancel{\cot\theta} + \frac{1}{|\mathrm{sen}\,\theta|} + \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$