Monsieur Catalan,

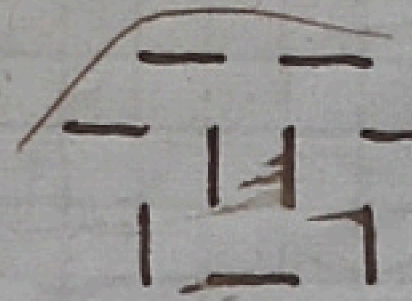
J'ai le plaisir de vous annoncer que je suis enfin arrivé dans ma famille, avec ma femme et mon enfant, en très-bonne santé. Je commencerai, ce soir, à rédiger les *Nouvelles Notes d'Arithmétique*, que j'espère pouvoir vous envoyer sous peu. – En voyage, je me suis occupé d'une curieuse question de géométrie, qui est peut-être inexploitée : –

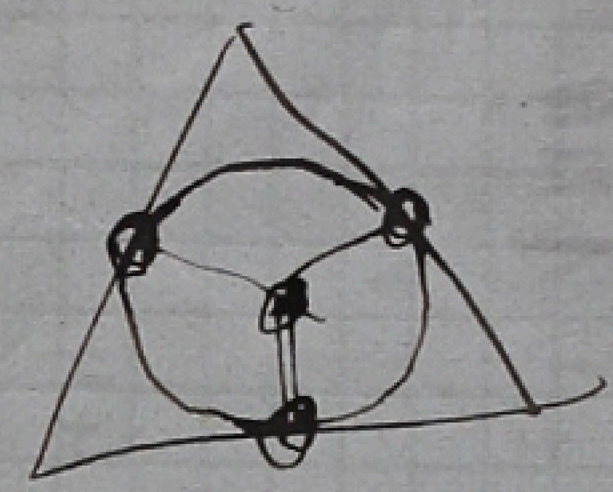
On joint les sommets d'un triangle ABC à un point quelconque M d'une conique circonscrite, et l'on cherche les points A', B', C', où les droites, ainsi construites, rencontrent les côtés du triangle. – Soient A'', B'', C'' les conjugués harmoniques de A', B', C', par rapport à BC, CA, AB. On sait que les points A'', B'', C'' sont sur une droite D. – J'ai trouvé que, <u>lorsque le point M se meut sur la conique, la droite D pivote autour d'un point fixe P</u>. – À chaque conique C, circonscrite à ABC, correspond ainsi un point P, et inversement. Si C est la circonférence, P est le centre des médianes antiparallèles. – Si C est une hyperbole équilatère, P se trouve sur la droite Δ, déduite du point de rencontre des hauteurs, comme D est déduite de M. – Si C est une parabole, P se trouve sur l'ellipse E, qui touche les côtés du triangle en leurs milieux, et dont le centre est le centre de gravité du triangle, – etc. etc. –

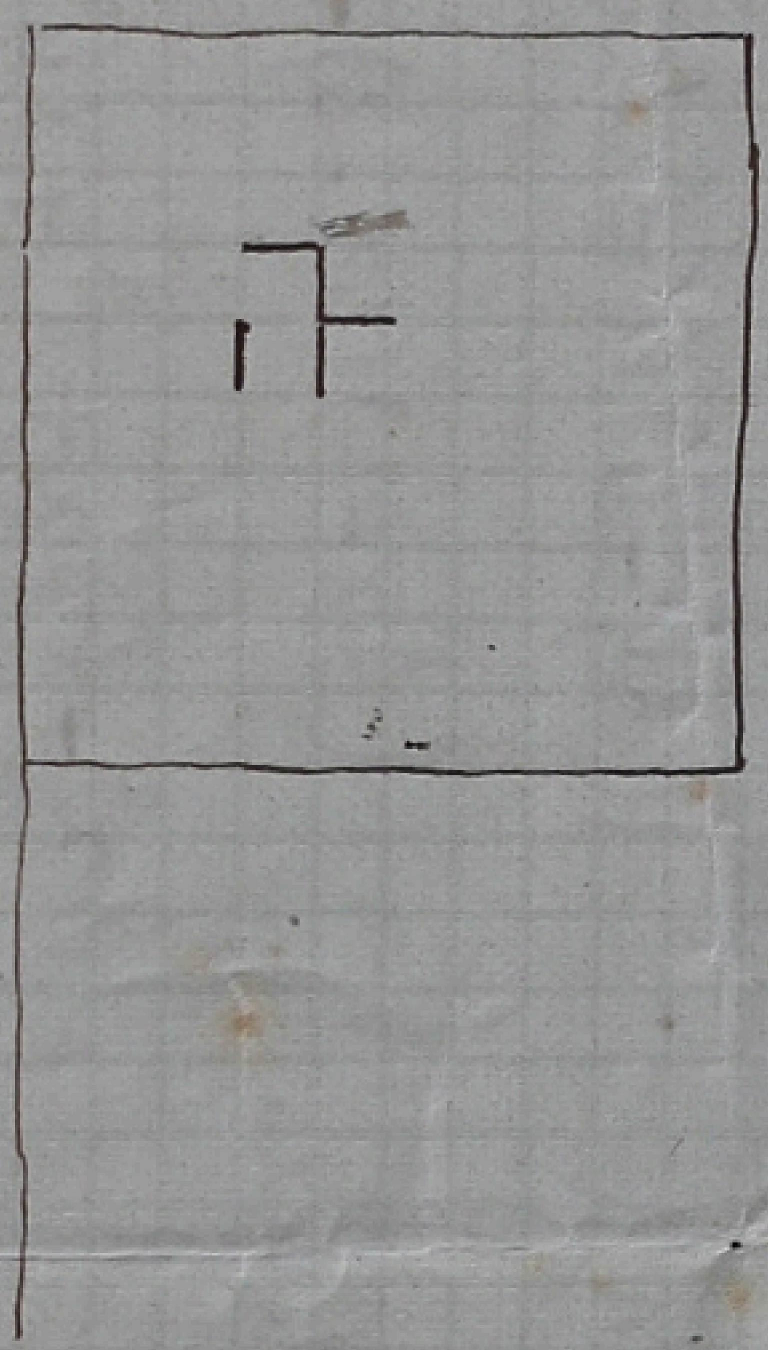
D'une manière générale, il y aurait à étudier la corrélation existant entre le point M et la droite D, et, par suite, entre les lieux de M et les enveloppes de D, – le triangle ABC étant invariable. – Il est, en outre, bien remarquable que les points du plan du triangle sont deux à deux conjugués, de telle sorte que chacun d'eux est le centre de la conique, correspondant à l'autre. – Ainsi, le centre des médianes antiparallèles et le centre du cercle circonscrit sont conjugués. – Si ~~[illegible]~~ un point est sur une médiane, son conjugué s'y trouve aussi. – Ces deux points divisent alors harmoniquement le segment compris entre le sommet et le centre de gravité. Les seuls points conjugués à eux-mêmes sont les sommets et le centre de gravité. – En partant de là, on trouve que : 1°. – Si D se meut parallèlement à elle-même, M décrit une hyperbole circonscrite, ayant son centre sur l'ellipse E. 2°. – Si D est un diamètre du cercle circonscrit, M est sur l'ellipse circonscrite, ayant pour centre le centre des médianes antiparallèles. 3°. Si D pivote autour d'un point de la circonférence des neuf points, M se meut sur une conique circonscrite, ayant son centre sur la droite Δ, – etc. etc.... Ce sujet, susceptible d'un grand développement, est facile à traiter par les coordonnées trilinéaires. –

Ma femme et moi, nous vous prions, Monsieur

Catalan, de vouloir bien agréer a Madame, l'expression de nos

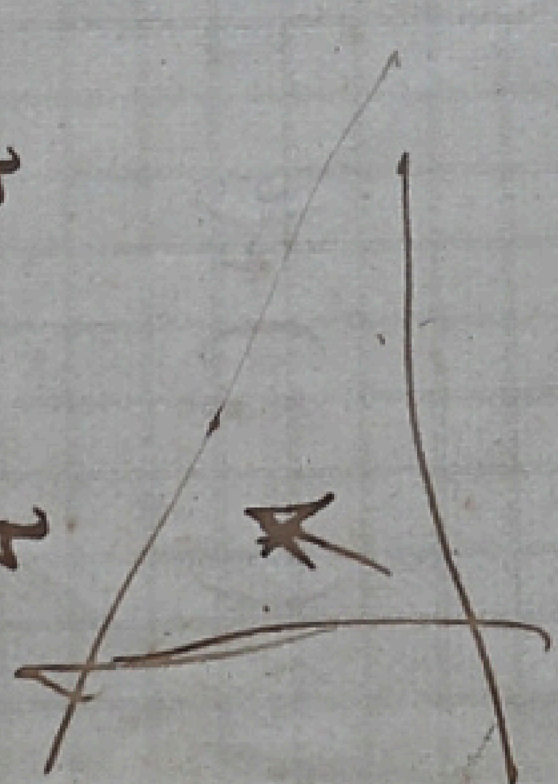




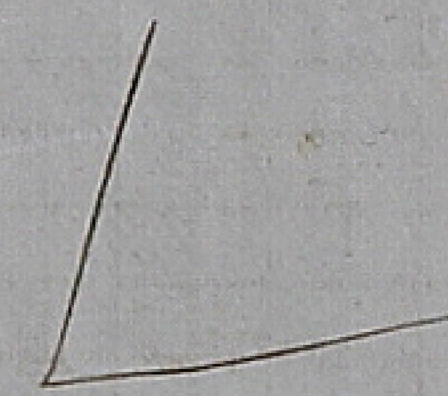


$$\frac{b^2}{4} - m\frac{ab}{4} - \frac{a^2}{4} - \frac{1}{2}(ma+b)$$

$$xy + \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab$$



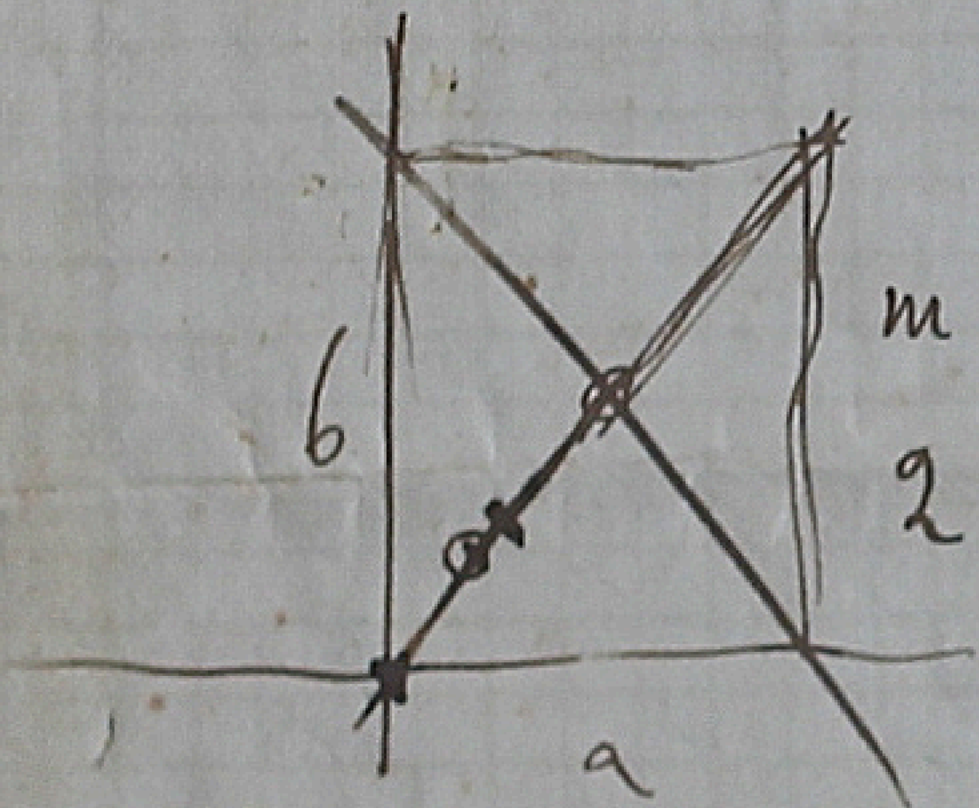
$$\boxed{y^2+mxy-x^2-\tfrac{1}{2}(ma+b)y-\tfrac{1}{2}(mb-a)x+\tfrac{1}{4}mab=0.}$$



$$8x^2-6ax+c^2=0$$

$$x=\frac{3a\pm\sqrt{9a^2-8b^2}}{8}$$

$$\begin{cases} 2y+mx=\tfrac{1}{2}(ma+b) \\ my-2x=\tfrac{1}{2}(mb-a) \end{cases}$$



$$\begin{cases} 4y+2mx=ma+b \\ 2my-4x=mb-a. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x-a)m=b-4y. \\ (2y-b)m=4x-a. \end{cases}$$

$$(2x-a)(4x-a)+(2y-b)(4y-b)=0.$$

$$(2m^2+8)x=m^2a+mb+2a.$$

$$y=0$$

$$8x^2-6ax+a^2+8y^2-6by+b^2=0$$

$$8\left(x-\tfrac{3}{8}a\right)^2+8\left(y-\tfrac{3}{8}b\right)^2=-(a^2+b^2)+8(a^2+b^2)\cdot\tfrac{9}{64}=$$

$$\left(x-\tfrac{3}{8}a\right)^2+\left(y-\tfrac{3}{8}b\right)^2=\left(\tfrac{c}{8}\right)^2$$

$$8x^2-6ax+a^2+b^2=0;$$

$$x^2-\tfrac{3}{4}ax \quad , \quad 8\cdot\tfrac{3}{4} \qquad =\frac{a^2+b^2}{8}$$